NEZÁSKOK Z DISKRÉTKY

pravděpodobnost

PŘÍKLAD PRVNÍ Předpokládejme, že pohlaví všech dětí je nezávisle náhodné s pravd. 1/2.

1. Ze všech rodin s dvěma dětmi zvolme jednu rodinu náhodně. Starší dítě je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou dcery?
2. Ze všech rodin s dvěma dětmi – z toho jednou dcerou – zvolme jednu rodinu náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou dcery?

PŘÍKLAD DRUHÝ (Monty Hallův problém.) Vyhráli jste televizní soutěž. Máte nyní na výběr ze tří dveří, z čehož za jedněmi je auto a za dvěmi je koza. Vašim cílem je získat auto. Ze tří stejných dveří jste si jedny vybrali. Moderátor vám neřekne, co za nimi je, ale otevře jedny ze dvou nevybraných dveří – tam je koza. Zbývají tedy dvoje dveře. Moderátor vám dá na výběr, jestli nechcete přehodnotit volbu dveří.

Otázka zní: co se týče pravděpodobnosti, vyplatí se vám nyní ukázat na druhé dveře, nebo se vyplatí ponechat si volbu, nebo je to jedno?

PŘÍKLAD TŘETÍ U kostky s n stěnami očíslovanými $1, \dots, n$, kde každé číslo má stejnou pravděpodobnost hodu ($1/n$), uvažte dva jevy:

- $A \equiv$ padlo sudé čislo.
- $B \equiv$ padlo číslo větší než $n/2$.

Jsou jevy A a B závislé pro $n = 6$? Pro $n = 8$? A jak to je pro obecné n?

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Mějme tři krabice se žárovkami. V první je 10 žárovek, 4 z nich jsou špatné. Ve druhé je 6 žárovek, jedna je špatná. Ve třetí je 8 žárovek, 3 z nich špatné. Z rovnoměrně náhodně zvolené krabice rovnoměrně náhodně zvolíme žárovku. Jaká je pravděpodobnost, že bude funkční?

PŘÍKLAD PÁTÝ Mějme starou dobrou poctivou minci, čili padne hlava s pravděpodobností 1/2 a orel s pravděpodobností 1/2. Nicméně ta se nám zrovna nehodí – potřebovali bychom třístěnnou kostku, čili kostku, která má tři různé hodnoty $1, 2, 3$, každá padá s pravděpodobností $1/3$, a nic jiného padnout nemůže. Na potvoru třístěnné kostky ani v prostoru nejdou sestrojit.

Vymyslete způsob, jak pomocí série hodů naší poctivé mince „odsimulovat" třístěnnou kostku.

Nápověda: V extrémním případě můžeme házet poctivou mincí i nekonečně mnohokrát. Ale asi by to nemělo být v každém!

PŘÍKLAD ŠESTÝ Představme si hrací kostky (krychlové), které mají na každé stěně napsáno libovolné přirozené číslo (bez omezení součtu ok, čísla se také mohou opakovat). Řekněme, že kostka K je *lepší*, než kostka L, pokud při hodu oběma kostkami padne na K číslo větší než na L s pravděpodobností alespoň 1/2.

Najděte trojici kostek K, L, M takových, že:

- K je lepší, než L,
- L je lepší, než M,
- M je lepší, než K.

NEZÁSKOK Z DISKRÉTKY

pravděpodobnost

Příklad první Předpokládejme, že pohlaví všech dětí je nezávisle náhodné s pravd. $1/2$.

1. Ze všech rodin s dvěma dětmi zvolme jednu rodinu náhodně. Starší dítě je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou dcery?
2. Ze všech rodin s dvěma dětmi – z toho jednou dcerou – zvolme jednu rodinu náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou dcery?

Příklad druhý (Monty Hallův problém.) Vyhráli jste televizní soutěž. Máte nyní na výběr ze tří dveří, z čehož za jedněmi je auto a za dvěmi je koza. Vašim cílem je získat auto. Ze tří stejných dveří jste si jedny vybrali. Moderátor vám neřekne, co za nimi je, ale otevře jedny ze dvou nevybraných dveří – tam je koza. Zbývají tedy dvoje dveře. Moderátor vám dá na výběr, jestli nechcete přehodnotit volbu dveří.

Otázka zní: co se týče pravděpodobnosti, vyplatí se vám nyní ukázat na druhé dveře, nebo se vyplatí ponechat si volbu, nebo je to jedno?

Příklad třetí U kostky s n stěnami očíslovanými $1, \ldots, n$, kde každé číslo má stejnou pravděpodobnost hodu $(1/n)$, uvažte dva jevy:

- $A \equiv$ padlo sudé čislo.
- $B \equiv$ padlo číslo větší než $n/2$.

Jsou jevy A a B závislé pro $n = 6$? Pro $n = 8$? A jak to je pro obecné n?

Příklad čtvrtý Mějme tři krabice se žárovkami. V první je 10 žárovek, 4 z nich jsou špatné. Ve druhé je 6 žárovek, jedna je špatná. Ve třetí je 8 žárovek, 3 z nich špatné. Z rovnoměrně náhodně zvolené krabice rovnoměrně náhodně zvolíme žárovku. Jaká je pravděpodobnost, že bude funkční?

Příklad pátý Mějme starou dobrou poctivou minci, čili padne hlava s pravděpodobností $1/2$ a orel s pravděpodobností $1/2$. Nicméně ta se nám zrovna nehodí – potřebovali bychom třístěnnou kostku, čili kostku, která má tři různé hodnoty $1, 2, 3$, každá padá s pravděpodobností $1/3$, a nic jiného padnout nemůže. Na potvoru třístěnné kostky ani v prostoru nejdou sestrojit.

Vymyslete způsob, jak pomocí série hodů naší poctivé mince „odsimulovat“ třístěnnou kostku.

Nápověda: V extrémním případě můžeme házet poctivou mincí i nekonečně mnohokrát. Ale asi by to nemělo být v každém!

Příklad šestý Představme si hrací kostky (krychlové), které mají na každé stěně napsáno libovolné přirozené číslo (bez omezení součtu ok, čísla se také mohou opakovat). Řekněme, že kostka K je *lepší*, než kostka L, pokud při hodu oběma kostkami padne na K číslo větší než na L s pravděpodobností alespoň $1/2$.

Najděte trojici kostek K, L, M takových, že:

- K je lepší, než L,
- L je lepší, než M,
- M je lepší, než K.