ZÁSKOK Z DISKRÉTKY

grafojízda

Definice: Graf je stromem, pokud je souvislý (z každého vrcholu se dá dostat do všech ostatních) a neobsahuje kružnici.

Příklad první

Dokažte, že pro strom platí $|E| = |V| - 1$.

Příklad druhý

Kolik existuje vrcholů stupně jedna, tzv. listů, ve stromu?

- Nejprve dokažte, že pro každý strom (na aspoň dvou vrcholech) je alespoň jeden list.

  Poznámka: Jakmile toto tvrzení dokážete, můžete použít indukci na stromech pomocí odebírání listů: strom T obsahuje list v, list odebereme, graf $T - v$ je stále stromem.

- Pak dokažte, že pro každý strom s alespoň dvěma vrcholy existují alespoň dva listy.
- Nakonec ukažte, že každý strom obsahuje alespoň Δ listů, kde Δ je jeho nejvyšší stupeň.

Příklad třetí

Dokažte, že přidám-li do stromu libovolnou další hranu (nepřidávám nový vrchol, jen spojuji dva stávající), tak vznikne právě jedna kružnice.

Příklad čtvrtý

Turnaj je orientovaný úplný graf. To znamená, že pro dané n je $\vec{T_n}$ graf takový, že vezmeme K_n a ke každé hraně vybereme jeden směr (říkáme, že hranu zorientujeme).

- Nalezněte turnaj na n vrcholech, který neobsahuje žádnou orientovanou kružnici.
- Mějme nyní libovolný orientovaný graf $\vec{G}$, který neobsahuje žádnou orientovanou kružnici. Dokažte, že potom v $\vec{G}$ existuje vrchol v, ze kterého nevede žádná hrana. Obsahuje $\vec{G}$ také vrchol v', **do** kterého nevede žádná hrana?

Příklad pátý

Ukažte, že každý strom je *bipartitní* – to znamená, že jeho vrcholy umím nabarvit bílou a černou barvou tak, že spolu sousedí vždy jen bílé s černými (nikdy ne stejnobarevné).

Příklad šestý

Představme si všechny grafy, které mají *přesně* k komponent. Který z nich má nejméně hran? A kolik hran vlastně má?

První bonusový příklad

Definujme dlouhou *Hamiltonovskou cestu* pro orientovaný graf na n vrcholech tak, že je to orientovaná cesta na všech vrcholech zadaného grafu, čili s n vrcholy.

Dokažte, že každý turnaj na n vrcholech obsahuje alespoň jednu Hamiltonovskou cestu jako podgraf. (Hodí se k tomu například indukce.)

Druhý bonusový příklad

Pokračování sedmé úlohy. Existuje nějaký turnaj, který má pouze jednu Hamiltonovskou cestu jako podgraf? Nalezněte jej. Co je zajímavější, je to, že takový turnaj existuje pouze jeden – dokažte, že pro každý turnaj, který není stejný jako onen protipříklad, už Hamiltonovské cesty existují alespoň dvě.