

příklad 2

Mějme relaci na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takovou že: $(a, b)R(c, d)$ právě tehdy když $\min(a, b) < \min(c, d)$. Rozhodněte, zda se jedná o ČUM a jestli existuje minimální/nejmenší/maximální/největší prvek. A také zdali existuje pro každé dvouprvkové podmnožiny infimum či supremum.

zobecněné definice

- x je minimální prvek relace R na množině X pokud neexistuje $a \in X$ tže aRx .
- x je maximální prvek relace R na množině X pokud neexistuje $a \in X$ tže xRa .
- x je největší prvek relace R na množině X pokud $\forall a \neq x \in X$ tže aRx .
- x je nejmenší prvek relace R na množině X pokud $\forall a \neq x \in X$ tže xRa .

řešení

Není čum, protože není reflexivní.

- Má minimální prvky tvaru: $(1, a), (a, 1) \forall a \in \mathbb{N}$, protože pokud by nějaký byl menší musí obsahovat na jedné pozici číslo menší než 1, ale to nebude $\in \mathbb{N}$.
- Nemá maximální prvek, protože nechť je to (a, b) , potom ale prvek $(\max(a, b) + 1, \max(a, b) + 1)$ je větší.
- Nemá nejmenší prvek, protože jsou spolu jednotlivá minima neporovnatelná.
- Nemá největší prvek, ze stejného důvodu jako nemá maximální.
- Existuje dvouprvková množina co nemá infimum: $(1, 2), (2, 1)$, protože neexistuje žádný prvek co by byl dolní závorou.
- Existuje dvouprvková množina co nemá supremum: $(1, 2), (2, 1)$, protože množina minimálních horních závor je neporovnatelná.