

Diskrétní matematika

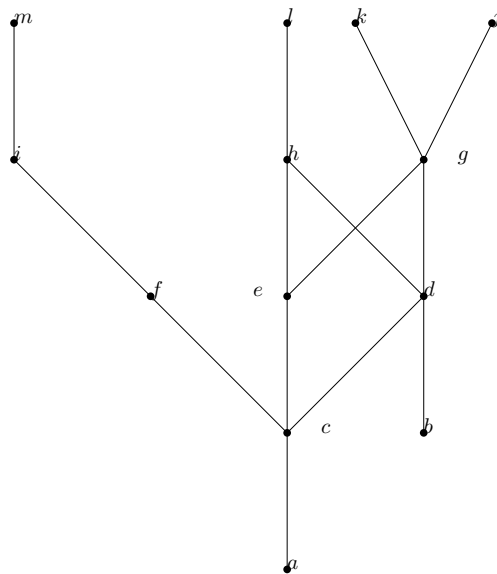
1. písemka — čtvrtěční paralelka

Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek. Věty z cvičení, či přednášky můžete používat bez DK, ale je potřeba uvést, že tak činíte. Každý příklad je za 10 bodů.

Příklad 1

Nalezněte (nebo ukažte proč neexistují) v relaci zadaném Hasseho diagramem následující:

- Největší prvek
- Nejmenší prvek
- Všechny maximální prvky
- Všechny minimální prvky
- Supremum \emptyset
- Supremum $\{d, e\}$
- Infimum $\{l, j\}$
- Infimum $\{i, f, c\}$



Obrázek 1: Hasseho diagram

Příklad 2

Nechť jsou relace R a S antisymetrické na množině X . Budou následující relace také antisymetrické?

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \Delta S$ (operace XOR)
- $R \circ S$
- $R^{-1} \circ S^{-1}$
- R^{-1}

Příklad 3

Spočítejte:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 =$$

Příklad 4

Kolika způsoby lze umístit 9 červených, 9 zelených a 9 modrých kamenů na šachovnici 3×3 tak, že některý řádek je celý pokryt kameny stejné barvy? Na jednom políčku může být maximálně jeden kámen (tedy může být i prázdné).

Výsledek nemusíte numericky dopočítávat.

Příklad 5

Řekněme, že dostat se z bytu do školy mi trvá podle dopravní situace někde mezi 15 a 60 minutami, a toto rozdělení je uniformní, tzn. je stejně pravděpodobné, že mi to bude trvat např. 20 minut, jako že to bude trvat 40 minut. (Čas je sice spojitá veličina, ale pro účely příkladu jej diskretizujeme po minutách – tzn. cesta mi trvá k nebo $k+1$ minut, nic mezi tím.)

- Jaká je pravděpodobnost, že mi to bude trvat déle, než 30 minut?
- Pokud už uplynulo 30 minut a já ještě nedorazil, jaká je pravděpodobnost, že to bude trvat ještě alespoň 15 minut, než dorazím?
- Jaká je podmíněná pravděpodobnost $Pr[X = x | X > 30]$ pro obecné x ?

Hodně štěstí!