

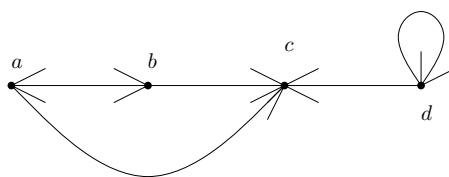
Diskrétní matematika

1. písemka — páteční paralelka

Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek. Věty z cvičení, či přednášky můžete používat bez DK, ale je potřeba uvést, že tak činíte. Každý příklad je za 10 bodů.

Příklad 1

Rozhodně pro zadané relace R a S zda platí:



Obrázek 1: Relace R

$$S = \begin{pmatrix} & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Je R tranzitivní?
- Je S slabě antisymetrická?
- je R^{-1} tranzitivní?
- Je $S \cap R$ symetrická?
- je $R \circ S$ reflexivní?
- je $S \circ R$ reflexivní?

Příklad 2

Mějme relaci na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takovou že:

- pokud $a = c$ a $b = d$ tak $(a, b)R(c, d)$.
- jinak $(a, b)R(c, d)$ pokud $\max(a, b) < \max(c, d)$

Rozhodněte, zda se jedná o ČUM a jestli existuje minimální/nejmenší/maximální/největší prvek. A také zdali existuje pro všechny dvouprvkové podmnožiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ infimum či supremum.

Příklad 3

I když tento příklad byl na cvičení, chci ho celý dokázat!

Spočítejte:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} =$$

Příklad 4

Kolik je 0/1 matic 4x5 (tzn. tabulka 4x5 obsahující jen hodnoty 0 nebo 1) takových, že žádný sloupec ani řádek neobsahuje samé nuly?

Příklad 5

Mějme pytlík obsahující 12 mincí: 5 z nich normálních ($p = \frac{1}{2}$ že padne hlava), 4 podivně vyvážené ($p = \frac{1}{3}$ že padne hlava) a 3 jsou dvouhlavé (obě strany jsou hlava, tzn. $p = 1$ že padne hlava). Náhodně z pytlíku vytáhneme minci a hodíme s ní.

- a Jaká je pravděpodobnost, že padla hlava?
- b Pokud padla hlava, jaká je pravděpodobnost, že mince byla prvního/druhého/třetího typu (zjistěte všechny tři pravděpodobnosti)?

Hodně štěstí!