

Diskrétní matematika

1. série

Na vymýšlení příkladů můžete spolupracovat, odevzdávejte však vámi samostatně sepsané řešení a to buď e-mailem (tarkencze@gmail.com) nebo na dalším cvičení. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek. Pokud nechcete mít zveřejněno jméno na webu použijte k podpisu úkolu navíc přezdívku.

Odevzdávejte do 23:59 dne 10/10/2013

Příklad 1

V rybníčku kruhového tvaru plave kačenka. Ráda by odletěla pryč. Protože má poraněnou plovací blánu, nemůže z hladiny jezera vzlétnout a musí nejprve doplat na břeh. Tam na ni ale číhá kočka, která se bojí vody, ale po okraji rybníka se pohybuje čtyřikrát větší rychlostí než kačenka plave.

Existuje způsob, jak může kačenka kočce upláchnout, ať se kočka pohybuje jakkoliv chytře? Například pokud by se rozhodla hned plavat na druhý konec jezírka než stojí kočka, utéct by nedokázala.

[2 body]

Příklad 2

Tabulku čokolády $m \times n$ dílků chceme rozlámat na jednotlivé dílky. (Mohu lámat pouze vodorovně či svisle.)

Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?

[2 body]

Příklad 3

Dokažte, že každou sumu větší než 7 dokážeme zaplatit mincemi hodnoty 3 a 5.

[1 bod]

Příklad 4

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n^5 - n)$ dělitelné 5.

[1 bod]

Příklad 5

Dokažte $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí:

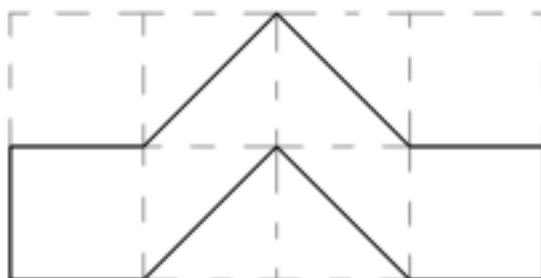
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

[1 bod]

Příklad 6

Na následující úloze si můžete otestovat svou schopnost nalezení jednoduchého leč skrytého řešení:

Rozdělte následující obrazec na 7 navzájem shodných částí. (Je nakreslený ve čtvercové mřížce.)



[1 bod]

A ještě na závěr pro pobavení a lepší orientaci v prvním týdnu. Průvodce vyčerpaného matfyzáka hláškami přednášejících - co si myslí, když říká:

- „Je to jasné.“ - Nechce se mi psát tu hroznou spoustu mezikroků.
- „Je to triviální.“ - Kdybych vám měl ukazovat, jak jsem k tomu došel, tak byste to nepochopili.
- „Je to zřejmé.“ - Důkaz má alespoň tři stránky.
- „Doma si jistě snadno dopočítáte...“ - Jak se to vlastně dělá?
- „Tohle si ověřte sami...“ - Tahle část důkazu je tak dlouhá a nudná, že je na to mého času škoda.
- „Mám pro vás malou nápovědu.“ - Je několik způsobů, jak to dokázat. Tohle je začátek toho nejsložitějšího.
- „Je to podobné, jako v minulém případě.“ - alespoň jeden řádek důkazu je stejný jako v minulém důkazu
- „Probereme to jen stručně.“ - Je to složité, ale už jsem v časovém skluzu, takže jim to ukážu všechno, ale budu prostě mluvit a psát rychleji.

Přeji pěkné řešení!

Tomáš