Diskrétní matematika

4. série

Na vymýšlení příkladů můžete spolupracovat, odevzdávejte však vámi samostatně sepsané řešení a to buď e-mailem (tarkencze@gmail.com) nebo na dalším cvičení. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek. Naopak můžete používat cokoli z přednášek či cvičení bez důkazu, jen vždy uveďte, co právě používáte. Pokud nechcete mít zveřejněno jméno na webu použijte k podpisu úkolu navíc přezdívku. Ještě bych rád upozornil, že bodové hodnocení jednotlivých příkladů nemusí vždy odpovídat jejich obtížnosti.

Odevzdávejte do 23:59 dne 31/10/2013 čtvrteční skupina a do 09:00 1/11/2013 páteční skupina.

příklad 1

Když už máme ty volby :-) : V politické straně která má 60 členů chtějí zvolit předsedu, tři místopředsedy a pět druhých místopředsedů. S tím, že každý člen může zastávat pouze jednu funkci a posty místopředsedů jsou nerozlišitelné. Kolika způsoby lze takovou volbu provést? Výsledek není třeba na konci vyčíslovat.

[1 bod]

Příklad 2

Podívejme se v Pascalově trojúhelníku na jednotlivé položky řádku jako na „cifry“ jakéhosi čísla P_n v desítkové soustavě – pro $n = 2$ to je 121, pro $n = 3$ to je 1331, pro $n = 5$ to je 161051. (Ten poslední případ je asi netriviální, získáme ho následovně: $\binom{5}{0} \cdot 10^0 + \binom{5}{1} \cdot 10^1 + \binom{5}{2} \cdot 10^2 + \binom{5}{3} \cdot 10^3 + \binom{5}{4} \cdot 10^4 + \binom{5}{5} \cdot 10^5$.)

Všimnuli jste si, že $P_2 = 121 = 11^2$, $P_3 = 1331 = 11^3$ a tak dále? Dokažte to obecně, tzn. $P_n = 11^n$.

[1 bod]

příklad 3

Opět Pascalův trojúhelník. Podívejme se tentokrát na p-tý řádek pro p prvočíslo. Všimnuli jste si, že všechny prvky tohoto řádku (až na krajní jedničky) jsou násobky toho prvočísla? (Například pro $p = 3$ to je 3, 3, pro $p = 7$ to je 7, 21, 35, 35, 21, 7.) Dokažte, že to platí pro libovolné prvočíslo p.

[0.5 bodu]

Příklad 4

sečtěte:

[a]

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} =$$

[b]

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{4n}{2k} =$$

[c]

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 =$$

[1.5 bodu]

příklad 5

Chceme uspořádat pofidérní seznamovací akci, kde postupně měníme rozesazení lidí a chceme, aby se mezi sebou všichni dobře a rovnoměrně poznali.

Přesně řečeno, máme $n = sk$ lidí, kteří sedí u k stolů po s lidech a chceme, aby se každá t-tice lidí potkala **právě** jednou.

Kolik různých rozesazení musíme vystřídat než toto nastane? Pro jaká s a t to vůbec jde?

[2 body]

příklad 6

[a]

Spočítejte, kolik je uspořádaných trojic (A, B, C) takových, že $A \subseteq B \subseteq C \subseteq \{1..n\}$.

[b]

Spočítejte, kolik je uspořádaných čtveřic (A, B, C, D) takových, že $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1..n\}$ a $A \subseteq C \subseteq D$.

[1 bod]

příklad 7

Kolik je permutací na množině velikosti n s **právě** dvěma cykly?

[1 bod]

Můžete používat cokoli z přednášek či cvičení bez důkazu, jen vždy uveďte co používáte. Také bych rád zdůrznil, abyste opravdu pečlivě zdůvodňovali vaše odpovědi.

Přeji pěkné řešení!

Tomáš