Diskrétní matematika

5. série

Na vymýšlení příkladů můžete spolupracovat, odevzdávejte však vámi samostatně sepsané řešení a to buď e-mailem (tarkencze@gmail.com) nebo na dalším cvičení. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek. Naopak můžete používat cokoli z přednášek či cvičení bez důkazu, jen vždy uveďte, co právě používáte. Pokud nechcete mít zveřejněno jméno na webu použijte k podpisu úkolu navíc přezdívku. Ještě bych rád upozornil, že bodové hodnocení jednotlivých příkladů nemusí vždy odpovídat jejich obtížnosti.

Odevzdávejte do 23:59 dne 7/11/2013 čtvrteční skupina a do 09:00 8/11/2013 páteční skupina.

Příklad 1

Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Slováky a 3 Maďary tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok? Příslušníci jednotlivých národů jsou nerozlišitelní.

(Tedy pět čechů v řadě za sebou stát nemůže, ale dva ano.)

[1 bod]

Příklad 2

Kolik je všech dělitelů čísla $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$?

[1 bod]

Příklad 3

Dokažte, že z 50 libovolně zvolených navzájem různých prvočísel lze vždy vybrat 13 prvočísel tak, že rozdíl každých dvou je dělitelný pěti.

[1 bod]

Příklad 4

Na n-místném kolotoči jelo n dětí. Děti chtějí jet ještě jednou, ale žádné z nich nechce sedět za stejným dítětem jako při první jízdě. Kolika různými způsoby je můžete posadit na kolotoč tak, abyste vyhověli jejich přání? Výsledek nemusíte upravovat.

[2 body]

Příkla 5

Kolik existují permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, které jsou involuce? Involuce je permutace π, která je sama svojí inverzí, tedy $\pi \circ \pi = id$. To jsou přesně takové permutace, které mají všechny cykly délky jedna nebo dva.

[2 body]

Příklad 6

Vzpomeňme, že $\check{s}(n)$ označuje funkci šatnářky, tedy počet permutací $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ bez pevného bodu.

Dokažte, že vždy platí: $\check{s}(n) = (n-1)(\check{s}(n-1) + \check{s}(n-2))$
[1 bod]

Přeji pěkné řešení!
Tomáš