Matematické dovednosti – 11. 12. 2015

Příklad 1. Dokažte matematickou indukcí, že

$$4 | 6n^2 + 2n$$

Příklad 2. Dokažte matematickou indukcí následující vzorečky:

$$\sum_{i=1}^{n} 4i + 5 = 2n^2 + 7n$$

$$\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$$

Příklad 3. Dokažte matematickou indukcí, že šachovince velikosti $2^n \times 2^n$ lze vydláždit kostičkami tvaru L o třech dílkách tak, že je právě jedno políčko šachovnice nevydlážděné.

Příklad 4. Dokažme indukcí následující tvrzení. Nechť $p_1, \ldots, p_n$ je $n \geq 2$ různých přímek v rovině, žádné dvě nejsou rovnoběžné. Potom všechny tyto přímky mají společný bod.

1. Pro $n = 2$ tvrzení platí.
2. Nechť tvrzení platí pro n_0 přímek. Mějmě $n = n_0 + 1$ přímek $p_1, \ldots, p_n$. Podle indukčního předpokladu mají přímky $p_1, \ldots, p_{n-1}$ společný bod, označme ho x. Stejně tak mají přímky $p_1, \ldots, p_{n-2}, p_n$ společný bod y. Přímka p_1 leží v obou skupinách, tedy jsou na ní oba body x a y. Totéž platí i pro přímku p_{n-2}. Jelikož jsou přímky p_1 a p_2 podle předpokladu různoběžné, protínají se jen v jednom vrcholu. A tedy $x = y$, což je společný bod přímek $p_1, \ldots, p_n$.

Kde je problém?

Příklad 5. Dokažte indukcí, že každá rovinná triangulace obsahuje vrchol stupně nanejvýš 3.

Příklad 6. Mějme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rekurzivně zadanou jako $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ a $a_n = (2-\sqrt{3})a_{n-1} + 2\sqrt{3}a_{n-2}$. Dokažte, že $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Příklad 7. Dokažte, že každé přirozené číslo $n \geq 2$ je součinem prvočísel.

Příklad 8. Ukažte, že každý celočíselný obnos větší, než 3 Kč lze vyplatit dvoukorunami a pětikorunami.

Příklad 9. Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

Příklad 10. Je dáno reálné číslo x takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je i číslo $x^n + \frac{1}{x^n}$ celé.