

Kombinatorika a grafy I.

Důkaz že Fanova rovina není 2-obarvitelná

Důkaz větičky co byla na cvičení, ale pro větší přehlednost a pro to abyste se nad tím mohli zamyslet, jsem to krátce sepsal.

1 Tvrzení

Fanova rovina $KPR(X, \mathcal{P})$ není 2-obarvitelná.

1.1 Důkaz

SPOREM.

Nechť $A_1 \cup A_2 = X$ disjunktí rozklad bodů dle zadaného 2-obarvení. BÚNO $|A_1| \geq |A_2|$. Rozeberme dva případy:

Pokud $|A_1| \geq 5$, potom ale všechny dvojice bodů leží na nějaké přímce (viz. podmínka (P2)). Takových dvojic je alespoň $\binom{5}{2} = 10$ a jelikož Fanova rovina má pouze 7 přímek musí dvě jednobarevné dvojice ležet na jedné přímce. SPOR

Pokud $|A_1| = 4$, potom všechny dvojice $\binom{4}{2} = 6$ leží na různých přímkách. Pokud ne, tak bychom dostali ihned spor. jelikož každým bodem ve Fanově rovině prochází 3 přímky, na všech začínajícím v bodu z A_1 leží ještě další bod z A_1 . Pokud tyto body spojíme, což musíme protože je to KPR (viz. (P2)), dostaneme pouze 6 přímek, zato všechny vrcholy budou mít již plný stupeň, tedy sedmá přímka neobsahuje žádný bod z A_1 a tedy je monochromatická, SPOR.

Q.E.D.