Kombinatorika a grafy I.

2. písemka

Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek. Každý příklad je za 10 bodů, ale ne všechny příklady jsou stejně těžké, tak zkuste začít od těch jednodušších.

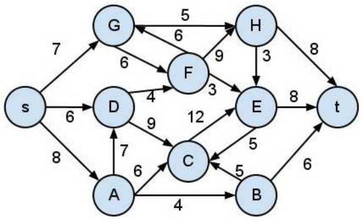
1 příklad

Definujme uspořádanou množinu $(D_n, |)$, kde D_n je množina všech dělitelů čísla přirozeného čísla n a $|$ je relace dělitelnosti.

Kolik má tato množina maximálních řetězců pro $n = 12!$?

2 příklad

Nalezněte minimální s, t-řez následujícího grafu a dokažte jeho minimalitu.



3 příklad

Rozhodněte zda platí následující tvrzení. (A dokažte či nalezněte protipříklad.)

V každém 2-v-souvislém grafu G existuje kružnice C, tž. graf $G \setminus C$ je souvislý.

4 příklad

Rozhodněte zda platí následující tvrzení. (A dokažte či nalezněte protipříklad.)

Každý k-regulární bipartitní graf je 1-faktorizovatelný. (Tedy že lze rozložit na disjunktní množiny hran $F_1, \dots, F_k$, které budou 1-faktory. A j-faktor grafu G je taková podmnožina jeho hran F, že každý vrchol má v F stupeň právě j.)

5 příklad

Mějme Ramseyovu větu pro tři barvy. Definujme $R(k, l, m)$ jako Ramseyovo číslo pro tři barvy. (Tedy minimální číslo, tž libovolně obarvený úplný graf na $R(k, l, m)$ vrcholech již musí obsahovat monochromatickou kliku velikosti k v první barvě , l ve druhé barvě nebo m ve třetí barvě.)

Dokažte že platí $R(k, l, m) \leq R(k - 1, l, m) + R(k, l - 1, m) + R(k, l, m - 1)$.

Hodně štěstí!