Kombinatorika a grafy I.

1. série

Na vymýšlení příkladů můžete spolupracovat, odevzdávejte však vámi samostatně sepsané řešení a to buď e-mailem (tarken@gmail.com) nebo na dalším cvičení. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek.

1 příklad

Odhadovali jsme hodnotu prostředního binomického čísla, tedy $\binom{n}{n/2}$ pro sudá n. Jak se to bude lišit pro lichá?

Dokažte že:

$$\frac{4^m}{2\sqrt{m}} \le \binom{2m+1}{m+1} \le \frac{e4^m}{\sqrt{2m}}.$$

[1.5 bodu]

2 příklad

Na přednášce jste použili AG nerovnost pro dva členy.

Dokažte AG nerovnost, tedy že pro nezáporná x_i platí $(\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}} \le \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.

Možná jste to už někde dělali, ale přeci jen se to hodí znát. Použijte jaký důkaz chcete, ale abyste to neměli tak těžké, zkusím vám poradit kostru pěkného důkazu který znám:

- Dokažte lemma 1: Je-li $a > 1$ a $b < 1$ tak potom je $a + b - ab > 1$.
- Dokažte lemma 2: Nechť a_i jsou kladná čísla a $\prod_{i=1}^n a_i = 1$ potom $\sum_{i=1}^n a_i \ge n$. Použijte normální indukci a lemma 1.
- Dokažte AG nerovnost pomocí lematu 2, kde zvolíte $a_i := x_i/X$ přičemž $X := (\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}$

[3.5 bodů]

3 příklad

Dokažte, že simplex (zobecnění trojúhelníku a čtyřstěnu do vyšších dimenzí) dimenze d, má $2^{d+1} - 1$ stěn všech dimenzí.

Například čtyřstěn:

- Je sám stěna dimenze 3.
- Má 4 stěny dimenze 2.
- 6 stěn dimenze 1, což jsou hrany.
- A opět 4 stěny dimenze 0, což jsou vrcholy.

Jde to dokázat více způsoby, ale jeden používá Pascalův trojúhelník.

[1.5 bodu]

4 příklad

Přestože jsme o faktoriálu zjistili, že roste exponenciálně rychle, jde na některé věci přijít snadno i bez kalkulačky.

Spočítejte tedy kolik nulových cifer je na konci čísla 12723!.

[1.5 bodu]

Pěkné řešení!

Tomáš