Kombinatorika a grafy I.

11. série

Na vymýšlení příkladů můžete spolupracovat, odevzdávejte však vámi samostatně sepsané řešení a to buď e-mailem (tarkencze@gmail.com) nebo na dalším cvičení. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek.

1 příklad

Dokažte že $R(3,4) = 9$. (stačí dokázat $R(3,4) \leq 9$, zbytek byl na cvičení.)

[1 bod]

2 příklad

Dokažte, že pokud obarvíme množinu všech bodů roviny (tedy $\mathcal{R}^2$) dvěma barvami, tak vždy najdeme 3 monochromatické body, které jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

(Může se hodit tvrzení, že každá posloupnost přirozených čísel o více než N prvcích obarvená libovolně 2 barvami obsahuje monochromatickou aritmetickou posloupnost délky 3, tedy splňující rovnici $y = \frac{x+z}{2}$.) Pokud ho budete používat tak ho také dokažte. [3.5 bodu]

Jelikož bude příští týden písemka, tak další příklady zde budou na připomenutí toho co by třeba mohlo být v písemce, a proto doporučuji si (nejen) je spočítat. Připomínám, že písemka bude obsahovat tyto témata ((anti)řetězce — 6.série, toky/řezy — 7.série, k-souvislost — 8.série, párování, vrcholové pokrytí, faktorizace a hallova věta — 9.série, Ramseyovky — 10–11.série).

3 příklad

Definujme uspořádanou množinu $(D_n, |)$, kde D_n je množina všch dělitelů čísla přirozeného čísla n a $|$ je relace dělitelnosti.

Kolik prvků má největší antiřetězec pro $n = 1450$?

[1 bod]

4 příklad

Dokažte, že souvislý kubický (3-regulární) graf je hranově 3-souvislý právě tehdy když je vrcholově 3-souvislý. [1 bod]

5 příklad

Pro každé $n \geq 5$ najděte navzájem různé množiny $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, každou o velikosti $n-3$, které jsou podmnožinami množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, aby $\mathcal{A}$ nemělo SRR (Systém různých reprezentantů).

[1.5 bodu]