

Kombinatorika a grafy I.

12. série

Na vymýšlení příkladů můžete spolupracovat, odevzdávejte však vámi samostatně sepsané řešení a to buď e-mailem (tarkencze@gmail.com) nebo na dalším cvičení. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek.

Jelikož dneska byla písemka, tak bych nejdřív rád řekl pár slov, jak souvisí princip kompaktnosti s kompaktností z Analýzy (snad ten pojem znáte). No, není to úplně náhoda, ale bohužel na pár řádků to nevysvětlím. Snad jen, že kompatnost na grafech je příklad obdobného obecnějšího tvrzení v logice k jehož důkazu se používají jeden konkrétní kompaktní prostor.

Další věc: jelikož jste dělali zobecnění pro nekonečně spočetně barev, tak bych rád jen poznamenal, co je na tom zajímavé (co nám to říká). Hezké je, že i pokud mám nekonečně barev, tak se mi obarvení stále chová v jistém smyslu poměrně pravidelně.

Příště mě připomeňte, že vám mám říci pár slov o axiomu výběru.

1 příklad

Definujme $W(k, r)$ jako minimální $N \in \mathbb{N}$, tž množina $1, \dots, N$ obsahuje monochromatickou aritmetickou posloupnost délky k obarvenou r barvami.

1.1

Přesně spočítejte kolik je $W(2, r)$.

[1 bod]

1.2

Odhadněte shora $W(3, 2)$ pomocí Ramseyova čísla, či přesně.

[2 body]

1.3

Jak by vypadalo $W(3, r)$? (Pomocí Ramseyova čísla shora.)

[1 bod]

2 příklad

Je zajímavé, že princip kompaktnosti (v té variantě jak byl na přednášce, ale pro jistotu ho k důkazu zformulujte) se dá využít i k důkazu nekonečné verze Hallovi věty pro hledání perfektního párování v nekonečném bipartitním grafu.

2.1

Zkuste tedy dokázat že: Pokud G má spočetně vrcholů, navíc stupeň každého vrcholu je konečný a je pro každou podmnožinu vrcholů jedné partity splněna Hallova podmínka potom G má perfektní párování.

Nemusíte dokazovat moc formálně, idea postačí :)
[2.5 body]

2.2

Nalezněte příklad, že pokud vynechám podmínku na konečnost stupňů, tak již existuje graf, který nemá perfektní párování. (I pokud splňuje Hallovu podmínku i podmínku spočetnosti vrcholů.)
[1.5 bodu]