

Kombinatorika a grafy I.

3. série

Na vymýšlení příkladů můžete spolupracovat, odevzdávejte však vámi samostatně sepsané řešení a to buď e-mailem (tarken@gmail.com) nebo na dalším cvičení. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek.

1 příklad

Zavzpomínejte co jste dělali na předposlední přednášce. A na cvičeních jsme tehle postup neopakovali, dost už ale nápovědy:

Máte devět kostek, spočtete pravděpodobnost že pokud jimi hodíte, tak součet na všech bude větší než 27.

[2 body]

2 příklad

Jeden pěkný příklad vypůjčený od Zuzky Safernové:

Včelař chce, aby sadař vysadil 25 nových stromků, přičemž ten má k dispozici pouze 4 druhy. Sadařova manželka odmítá ořešák, neb je velký a zabírá moc místa. (Navíc každý správný borec ví, že med z ořešáku se nedá jíst :-)) Jabloně jsou jí taky proti gustu, mají jich už příliš. Naproti tomu bezmezně miluje třešňovo-švestkovou marmeládu, a tak klade tvrdé podmínky – nejvýše jeden ořešák, nejvýše 10 jabloní, alespoň 6 třešní a alespoň 8 slivoní (slivovice – silná motivace) – nebo rozvod. Kolika způsoby může sadař zabránit rozvodu?

[1 bod]

3 příklad

Sice jsme to procvičovali na cvičení, ale pro ty z vás kteří si tuto základní techniku nezkusili a nebo nebyli na cvičení, tak jeden příklad.

Napište explicitní vzorec pro rekurentně zadanou posloupnost:

$$a_0 = 2; a_1 = 3; a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}.$$

[1 bod]

4 příklad

Na cvičení jsem vám sliboval další příklad s průměry.

Máme posloupnost definovanou:

$$a_0; a_1; a_n = \frac{\sum_{i=0}^n a_i}{n}, \forall n \geq 2$$

Spočtete $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ kde výsledek vyjádříte pomocí parametrů a_0 a a_1 .

[1 bod]

5 příklad

Na cvičení jsme si ukazovali (ale nedopočítali), jak nalézt explicitní vzoreček pro:

$$a_0 = 2; a_1 = 8; a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

Spočítejte si to tedy pořádně sami.

[1 bod]

6 příklad

Také byste měli znát limity vytvářejících fcí.

Dokaže, že přestože fce $f(x)$ má derivace v okolí nuly nulové, tak neexistuje žádná mocniná řada jejíž by $f(x)$ byla vytvářející funkcí v okolí nuly.

$$f(0) = 0; f(x \neq 0) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

[1 bod]

7 příklad

Kolik existuje různých korektních uzávorkování součinu (místo součinu si představte neasociativní operaci) n členů?

Tedy pro $n = 3$ mám dvě možnosti $a(bc)$ a $(ab)c$.

[1 bod]

Tohle není příklad, ale přesto si to můžete přečíst:

S Fibonacciho čísla se dá počítat spousta zajímavých věcí, i když to nesouvisí úplně tak s vytvářejícími funkcemi. Velice zajímavá je periodicita, která se ve Fibonacciho číslech vyskytuje: číslice na pozicích jednotky se opakují každých 60 čísel, poslední dvě čísla se opakují s periodou 300. Izraelský matematik Dov Jarden v sedesátých letech dokázal, že pro jakýkoli počet n posledních číslic od tří výše je periodicita $15 * 10^{n-1}$.

Pěkné řešení!

Tomáš