

Kombinatorika a grafy I. 2013/2014

1. písemka

Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek. Naopak můžete používat cokoli z přednášek či cvičení bez důkazu, jen vždy uveďte, co právě používáte. Pokud nechcete mít zveřejněno jméno na webu, použijte k podpisu písemky navíc přezdívku.

Každý příklad je za 10 bodů. Ještě bych rád upozornil, že bodové hodnocení jednotlivých příkladů nemusí vždy odpovídat jejich obtížnosti.

Příklad 1

Nalezněte co nejlepší horní odhad pro následující sumu:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}.$$

Příklad 2

Najděte explicitní vzorec pro n -tý člen posloupnosti definované:

$$a_1 = 3; a_2 = 5; a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n.$$

Příklad 3

Nalezněte vytvořující funkci následující posloupnosti:

$$a_0 = -2; a_1 = 0; a_{n+2} = a_n + n^2 + \frac{1}{n+5}.$$

Stačí vyjádřit $a(x)$, výsledek nemusíte dále upravovat.

Příklad 4

Nalezněte vytvořující funkci následující posloupnosti:

$$a_0 = 1; a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + \dots + na_0.$$

Stačí vyjádřit $a(x)$, výsledek nemusíte dále upravovat.

Příklad 5

Na kolik nejméně tahů lze vyřešit Hanojské věže?

Tedy mám 3 hromádky A, B a C na kterých je celkem na sobě n disků o různém poloměru vždy seřazených ze spodu od těch s největším poloměrem k těm s menším poloměrem. Mým cílem je přesunout disky z hromádky A na hromádku C , přičemž vždy mohu pohnout jen horním diskem a nikdy nesmím disk s větším poloměrem položit na disk s menším poloměrem. Navíc nemohu dělat přímé přesuny mezi A a C , mohu pouze přesouvat disky z nebo na hromádku B .

Kolik nejméně musím udělat tahů, abych přesunul n disků z A na C ? Najděte tedy explicitní vzorec pro a_n .

Hodně štěstí!