Kombinatorika a grafy I. 2013/2014

4. série

Na vymýšlení příkladů můžete spolupracovat, odevzdávejte však vámi samostatně sepsané řešení a to buď e-mailem (tarkencze@gmail.com) nebo na dalším cvičení. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek. Naopak můžete používat cokoli z přednášek či cvičení bez důkazu, jen vždy uveďte, co právě používáte. Pokud nechcete mít zveřejněno jméno na webu použijte k podpisu úkolu navíc přezdívku. Ještě bych rád upozornil, že bodové hodnocení jednotlivých příkladů nemusí vždy odpovídat jejich obtížnosti.

Odevzdávejte do 12:20 dne 27/3/2014.

Příklad 1

Zrušíme nultou podmínku (P0) (tu o existenci čtverce) v definici KPR (konečné projektivní roviny).

Jaké všechny objekty, které nejsou KPR, navíc dostaneme? **Nezapomeňte pořádně dokázat, že žádné další případy již nejsou.**

Abychom se všichni shodli na definici axiomů (P1) a (P2), pro jistotu je přikládám. Mějme dvojici $(X, \mathcal{P})$, kde X je množina a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$. Potom platí:

(P1) $\forall P_1 \neq P_2 \in \mathcal{P}; |P_1 \cap P_2| = 1$

(P2) $\forall x_1 \neq x_2 \in X; \exists! P \in \mathcal{P}$ tž. $\{x_1, x_2\} \subseteq P$

[2 body]

Příklad 2a

Dokažte, že pro každou KPR řádu n existuje $A \subseteq X$ velikosti nejvýše $3n$ taková, že každá přímka obsahuje alespoň dva body z A.

[2 body]

Příklad 2b

Dokažte, že libovolná taková množina A má alespoň $2n$ prvků.

[2 body]

Příklad 4

Nalezněte maximální množinu navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu 4 a dokažte že je maximální.

[1 bod]

Příklad 5

Definujme si Ortogonální tabulku $OT(n, S)$ jako matici M tvaru $S \times n^2$ nad abecedou Σ o velikosti n splňující:

$$\forall i \neq j \in S; \forall a, b \in \Sigma; \exists k : M_{i,k} = a \wedge M_{j,k} = b$$

Dokažte, že existuje alespoň $S - 2$ Ortogonálních latinských čtverců řádu n, právě tehdy když existuje $OT(n, S)$.

[2 body]

Přeji pěkné řešení! Tomáš