Kombinatorika a grafy I. 2013/2014

8. série

Na vymýšlení příkladů můžete spolupracovat, odevzdávejte však vámi samostatně sepsané řešení a to buď e-mailem (tarkencze@gmail.com) nebo na dalším cvičení. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek. Naopak můžete používat cokoli z přednášek či cvičení bez důkazu, jen vždy uveďte, co právě používáte. Pokud nechcete mít zveřejněno jméno na webu použijte k podpisu úkolu navíc přezdívku. Ještě bych rád upozornil, že bodové hodnocení jednotlivých příkladů nemusí vždy odpovídat jejich obtížnosti.

Odevzdávejte do 12:20 dne 22/5/2014.

Příklad 1

Definujme $W(k,r)$ jako minimální $N \in \mathbb{N}$, tž. množina $\{1,\ldots,N\}$ obarvená pomocí r barev obsahuje monochromatickou aritmetickou posloupnost délky k.

(a)

Přesně spočítejte kolik je $W(2,r)$.
[1 bod]

(b)

Odhadněte shora $W(3,2)$ pomocí Ramseyova čísla, či přesně.
[2 body]

(c)

Odhadněte shora $W(3,r)$? Například pomocí Ramseyova čísla.
[1 bod]

Příklad 2

Je zajímavé, že princip kompaktnosti, o kterém jsme mluvili na cvičení, se dá využít i k důkazu nekonečné verze Hallovi věty pro hledání perfektního párování v nekonečném bipartitním grafu.

Věta[Princip kompaktnosti] Mějme množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ spočetnou a pro každé $x_i \in X$ máme konečnou množinu povolených barev B_i. Navíc máme pro každé k funkci $f_k : \{x_1, \ldots, x_k\} \to B$, která každému x_i přiřadí nějakou pro něj povolenou barvu. Potom existuje funkce $f : X \to B$ tž. opět přiřadí každnému x_i povolenou barvu a navíc pro každou konečnou $Y \subseteq X$ se její obarvení pomocí f shoduje s jejím obarvením pomocí f_k pro nějaké k.

(a)

Zkuste tedy dokázat že: Pokud G má spočetně vrcholů, navíc stupeň každého vrcholu je konečný a je pro každou podmnožinu vrcholů jedné partity splněna Hallova podmínka potom G má perfektní párování.

Nemusíte dokazovat moc formálně, idea mě postačí. :)
[3 body]

(b)

Nalezněte příklad, že pokud vynechám podmínku na konečnost stupňů, tak již existuje graf, který nemá perfektní párování. (I pokud splňuje Hallovu podmínku a podmínku spočetnosti vrcholů.)

[2 bodu]

Přeji pěkné řešení!

Tomáš