

3. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Grupy

PŘÍKLAD PRVNÍ Rozhodněte, které z následujících struktur jsou grupy:

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{C}, *)$, $(\mathbb{Q}, *)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$.
2. $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\{\text{matice typu } n \times n\}, +)$, $(\{\text{matice typu } n \times n\}, \cdot)$, $(\{\text{regulární matice typu } n \times n\}, \cdot)$.
(zde $+$ je maticové sčítání a \cdot je maticové násobení, vše nad reálnými čísly.)
3. $(\mathbb{Z}_3, +_{\text{mod } n})$, $(\mathbb{Z}_6, +_{\text{mod } 6})$, $(\mathbb{Z}_8, *_{\text{mod } 8})$, $(\mathbb{Z}_6, *_{\text{mod } 6})$, $(\mathbb{Z}_n, +_{\text{mod } n})$, $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, *_{\text{mod } n})$ (pro které n není), $(2\mathbb{Z}, +)$

Kde

$$\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\},$$

$$n\mathbb{Z} := \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\},$$

$$a +_{\text{mod } n} b := \text{zbytek po vydělení čísla } a + b \text{ číslem } n,$$

$$a *_{\text{mod } n} b := \text{zbytek po vydělení čísla } a * b \text{ číslem } n.$$

PŘÍKLAD DRUHÝ Necht

$$A = \{(t, 2t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{(t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Potom dokažte, že $(A, +)$ a $(\{a+b \mid a \in A, b \in B\}, +)$ jsou grupy, kde $+$ je klasické sčítání aplikované po složkách.

PŘÍKLAD TŘETÍ Ukažte, že v každé grupě platí:

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Ukažte, že jednotka je v grupě určena jednoznačně.

PŘÍKLAD PÁTÝ Ukažte, že axiomy v definici Grupy (G, \cdot, e) se dají redukovat na následující axiomy:

$$(A) \forall a, b, c \in G (ab)c = a(bc)$$

$$(E') \forall a \in G : ae = a$$

$$(I') \forall a \in G \exists b \in G : ab = e$$