5. DOMÁCÍ ÚKOL Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární zobrazení a afinní prostory

Příklad první

Mějme $F : V \to W$ lineární zobrazení z vektorového prostoru V do prostoru W nad tělesem $\mathbb{R}$ definované následujícím předpisem:

$$\begin{aligned} F((0,1,2,3)^T) &= (1,0,5)^T, \\ F((1,1,1,0)^T) &= (1,7,5)^T, \\ F((0,0,1,-3)^T) &= (1,0,0)^T, \\ F((0,1,0,3)^T) &= (1,0,-1)^T. \end{aligned}$$

Všechny vektory jsou zadané vzhledem ke kanonické bázi.

Určete následující:

- Matici zobrazení A_F,
- bázi $Ker(A_F)$,
- bázi $\mathcal{S}(A_F)$,
- bázi $\mathcal{R}(A_F)$,

[4 body]

Příklad druhý

Najděte matici přechodu od báze B k bázi B' nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ a určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B'. Dále najděte matici přechodu od báze B' zpět k bázi B.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} a_1 + 1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Pro libovolné $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_7$.

[3 body]

Příklad třetí

Zjistěte, zda je množina M afinně nezávislá.

$$M := \{(1,0,2,3)^T, (2,0,1,1)^T, (1,1,0,-1)^T, \}.$$

Pokud není, vyjádřete závislé vektory jako afinní kombinaci ostatních.

A v každém případě doplněnte afinně nezávislou část M, tak aby tvořila maximální affině nezávislou množinu v prostoru R^4.

[3 body]