

7. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory — úvod

PŘÍKLAD PRVNÍ Základní vlastnosti vektorových prostorů (přímo z axiomů): Pro vektorový prostor V nad tělesem T :

1. Pro všechny $v \in V$ platí, že $0v = \vec{0}$.
2. Pro všechny $\alpha \in T$ platí, že $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.
3. Pro všechny $v \in V$ a všechny $\alpha \in T$ platí, že kdykoliv $\alpha v = \vec{0}$, potom $\alpha = 0$ nebo $v = \vec{0}$.
4. Pro všechny $v \in V$ platí, že opačný vektor k vektoru v je vektor $(-1)v$. (tzn. $v + (-1)v = \vec{0}$)

PŘÍKLAD DRUHÝ Ukažte, které z následujících množin (a za jakých předpokladů) tvoří vektorový prostor:

1. Geometrické příklady: čtverec; kruh; $\{(t, 2t, 3t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$; $\{(2s + t, s - t, 3s + t)^T \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. (jako podprostory \mathbb{R}^n)
2. Prostor polynomů nad nějakým tělesem a jeho podprostory: polynomy stupně nejvýše n .
3. Prostor funkcí.

PŘÍKLAD TŘETÍ Ukažte, že struktura $(\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}, \oplus, \odot)$ nad tělesem \mathbb{Q} , kde $r_1 \oplus r_2 = r_1 \cdot r_2$ a $\alpha \odot r = r^\alpha$, je vektorový prostor.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Zjistěte, zda se vektor v dá získat jako lineární kombinace vektorů z množiny A nad tělesem T . Kde

1. $v = (5, 2, -3)^T$, $A = \{(4, 1, -2)^T, (1, 1, -1)^T, (3, 4, -1)^T\}$ a $T = \mathbb{R}$,
2. $v = (7, -2, \lambda)^T$, $A = \{(2, 3, 5)^T, (1, -6, 1)^T, (5, 7, 8)^T\}$ a $T = \mathbb{R}$ (v závislosti na $\lambda \in \mathbb{R}$),
3. $v = (i, -1)^T$, $A = \{(1, i)^T, (i, 1 - i)^T\}$ a $T = \mathbb{C}$,
4. $v = (1, 0, 1)^T$, $A = \{(2, 1 - i, 1 + i)^T, (2 + 2i, 1 + 3i, 1 - i)^T, (2, i - 1, 1 + i)^T\}$ a $T = \mathbb{C}$.

PŘÍKLAD PÁTÝ Nechtě u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad \mathbb{R} . Rozhodněte, zda jsou následující množiny lineárně nezávislé (a pokud jsou lineárně závislé, vyjádřete nějaký vektor jako lineární kombinaci ostatních):

1. $\{u, u + v, u + w\}$,
2. $\{u + v, u + w, v + w\}$,
3. $\{u + v, u - v, u + w, u - w\}$,