

8. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory

PŘÍKLAD PRVNÍ Ukažte, které z následujících množin (a za jakých předpokladů) tvoří vektorový prostor:

1. Prostor polynomů nad nějakým tělesem a jeho podprostory: polynomy stupně nejvýše n .
2. Prostor funkcí.

PŘÍKLAD DRUHÝ Ukažte, že struktura $(\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}, \oplus, \odot)$ nad tělesem \mathbb{Q} , kde $r_1 \oplus r_2 = r_1 \cdot r_2$ a $\alpha \odot r = r^\alpha$, je vektorový prostor.

PŘÍKLAD TŘETÍ Zjistěte, zda se vektor v dá získat jako lineární kombinace vektorů z množiny A nad tělesem T . Kde

1. $v = (5, 2, -3)^T$, $A = \{(4, 1, -2)^T, (1, 1, -1)^T, (3, 4, -1)^T\}$ a $T = \mathbb{R}$,
2. $v = (7, -2, \lambda)^T$, $A = \{(2, 3, 5)^T, (1, -6, 1)^T, (5, 7, 8)^T\}$ a $T = \mathbb{R}$ (v závislosti na $\lambda \in \mathbb{R}$),
3. $v = (i, -1)^T$, $A = \{(1, i)^T, (i, 1 - i)^T\}$ a $T = \mathbb{C}$,
4. $v = (1, 0, 1)^T$, $A = \{(2, 1 - i, 1 + i)^T, (2 + 2i, 1 + 3i, 1 - i)^T, (2, i - 1, 1 + i)^T\}$ a $T = \mathbb{C}$.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Nechtě u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad \mathbb{R} . Rozhodněte, zda jsou následující množiny lineárně nezávislé (a pokud jsou lineárně závislé, vyjádřete nějaký vektor jako lineární kombinaci ostatních):

1. $\{u, u + v, u + w\}$,
2. $\{u + v, u + w, v + w\}$,
3. $\{u + v, u - v, u + w, u - w\}$,

PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte, že vektorový podprostor generovaný dvěma vektory \mathbb{R}^3 (tzn. lineární obal těchto vektorů) je buď přímka procházející počátkem, rovina procházející počátkem, nebo pouze počátek.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Najděte bázi a určete dimenzi prostoru W obsahující vektor $w = (1, -5, -4, -6)^T$ a která je zároveň lineárním obalem vektorů $u_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)^T$ a $u_3 = (3, -1, 2, 2)^T$.

PŘÍKLAD SEDMÝ Ukažte, že množina B je bázi vektorového prostoru V a vyjádřete vektor $v \in V$ souřadnicemi vůči bázi B . Kde

1. $B = \{(2, 1, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (1, 1, 3)^T\}$, $v = (1, 1, 1)$ a $V = \mathbb{R}^3$,
2. $B = \{(1, 2, 1)^T, (2, 9, 0)^T, (3, 3, 4)^T\}$, $v = (0, 2, 1)$ a $V = \mathbb{R}^3$,
3. $B = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$, $v = 2x^2 + 1$ a $V =$ množina polynomů stupně nejvýše 2.
4. $B = \{x^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$, $v = 4x^3 + 2x + 3$ a $V =$ množina všech polynomů.

PŘÍKLAD OSMÝ Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru daného soustavou rovnic (nad \mathbb{R}):

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 &= 0 \\2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0.\end{aligned}$$