10. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární zobrazení

PŘÍKLAD PRVNÍ Ukažte, že množina B je bází vektorového prostoru V a vyjádřete vektor $v \in V$ souřadnicemi vůči bázi B. Kde

1. $B = \{(2,1,0)^T, (0,1,0)^T, (1,1,3)^T\}$, $v = (1,1,1)$ a $V = \mathbb{R}^3$,
2. $B = \{(1,2,1)^T, (2,9,0)^T, (3,3,4)^T\}$, $v = (0,2,1)$ a $V = \mathbb{R}^3$,
3. $B = \{x+1, x^2-1, x^3+x^2, x^2+x\}$, $v = ...$ a $V =$ množina polynomů stupně nejvýše 3.

PŘÍKLAD DRUHÝ Spočítejte $F(w)$ kde $F\colon V \to W$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory V a W s bázemi B_1 a B_2 zadané následujícím předpisem (a vyjádřete výsledek vzhledem k bázi B_2):

1.

$$\begin{aligned} V, W &\text{ jsou } \mathbb{R}^3 \text{ a } \mathbb{R}^2 \\ B_1, B_2 &\text{ jsou kanonické báze} \\ v &= (1,3,8)^T \text{ nebo obecně } (x,y,z)^T \end{aligned}$$

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{aligned} V, W &\text{ jsou } \mathbb{R}^3 \text{ a } \mathbb{R}^2 \\ B_1 &= \{(1,1,0)^T, (0,1,1)^T, (1,0,1)^T\}, B_2 = \{(1,0)^T, (2,1)^T\} \\ v &= (1,3,8)^T \text{ nebo obecně } (x,y,z)^T \end{aligned}$$

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{aligned} V &\text{ je } \mathbb{R}^3, \quad W \text{ je prostor polynomů} \\ B_1 &= \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}, B_2 = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ v &= (3,1,4)^T \end{aligned}$$

$$F((1,1,0)^T) = 2x^3 + x^4, \quad F((0,1,1)^T) = 1 + x^2, \quad F((1,0,1)^T) = 2x^2 + x^3.$$

4.

$$\begin{aligned} B_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}, \quad B_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ v &= u_1 + 2u_2 - u_3 \end{aligned}$$

$$F(u_1) = v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \quad F(u_2) = 2v_1 - 2v_3, \quad F(u_2) = v_1 + 2v_2 + v_3.$$

5.

$$\begin{aligned} B_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}, \quad B_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ v &= u_1 + 2u_2 - u_3 \end{aligned}$$

$$F(u_1) = v_1 - v_2 + v4, \quad F(u_2) = 2v_3 + v_4, \quad F(u_2) = v_1 + 2v_2 - v_3 + 2v_4.$$

Příklad třetí Spočítejte matici lineárního zobrazení. Pro

$$F((x_1, x_2)^T) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)^T \tag{1}$$
$$F((x_1, x_2)^T) = (x_1, x_2)^T \tag{2}$$
$$F((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)^T \tag{3}$$
$$F((x_1, x_2, x_3)^T) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)^T. \tag{4}$$

a pro

$$F((3,1)^T) = (1,2)^T, \text{ a } F((-1,0)^T) = (1,1)^T \tag{5}$$
$$F((4,1)^T) = (1,1)^T, \text{ a } F((1,1)^T) = (3,-2)^T \tag{6}$$
$$F((1,1)^T) = (2,1)^T, \text{ a } F((-1,1)^T) = (6,3)^T. \tag{7}$$

Příklad čtvrtý Najděte matici přechodu od báze B k bázi B' nad tělesem $\mathbb{R}$ a určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B'. Kde

1.
$$B = \text{ kanonická}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3.
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4.
$$B = \{u_1, u_2\}, \quad B' = \{2u_1 + 5u_2, u_1 + 3u_2\}, \quad T = \mathbb{Z}_7, [x]_B = (2,3)^T.$$