12. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární zobrazení

Příklad první Spočítejte $F(w)$ kde $F\colon V \to W$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory V a W s bázemi B_1 a B_2 zadané následujícím předpisem (a vyjádřete výsledek vzhledem k bázi B_2):

$$B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad B_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$v = u_1 + 2u_2 - u_3$$
$$F(u_1) = v_1 - v_2 + v_4, \quad F(u_2) = 2v_3 + v_4, \quad F(u_3) = v_1 + 2v_2 - v_3 + 2v_4.$$

Příklad druhý Spočítejte matici lineárního zobrazení. Pro

$$F((x_1, x_2, x_3)^T) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)^T. \tag{1}$$

a pro

$$F((1,1)^T) = (2,1)^T, \text{ a } F((-1,1)^T) = (6,3)^T. \tag{2}$$

Příklad třetí Najděte matici přechodu od báze B k bázi B' nad tělesem $\mathbb{R}$ a určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B'. Kde

1. $$B = \text{ kanonická}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
2. $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B' = \text{ kanonická.}$$
3. $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
4. $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
5. $$B = \{u_1, u_2\}, \quad B' = \{2u_1 + 5u_2, u_1 + 3u_2\}, \quad T = \mathbb{Z}_7, [x]_B = (2,3)^T.$$

Příklad čtvrtý Určete jádro a obraz lineárního zobrazení, jejich dimenze a určete jestil je zobrazení prosté pro lineární zobrazení F zadané následovně;

1. $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$
2. $F((1,0,0)^T) = (2,3)^T, \quad F((1,1,1)^T) = (0,1)^T, \quad F((-1,3,-1)^T) = (1,4)$
3. $F((1,0)) = 2x + x^2, \quad F((0,1)^T) = 3x^3 + x$
4. $F\colon X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$