13. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární forma a afinní prostory

D: *Izomorfismus* je bijektivní zobrazení, které zachovává strukturu. Tedy v případě izomorfismu vektorových prostorů V, W nad tělesem $\mathbb{T}$, hledáme bijekci $b : V \to W$ takovou, že $\forall u, v \in V$ a $\forall \alpha \in \mathbb{T}$ platí:

$$b(u + v) = b(u) + b(v)$$

$$b(\alpha u) = \alpha b(u).$$

D: Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinní prostor*, pokud A je tvaru $L + v$ pro nějaký lineární prostor L a posuvný vektor $v \in \mathbb{R}^d$.

Tvrzením „A je tvaru $L + v$“ se myslí bijekce mezi vektory z L a vektory A zadaná jako $b(u) = u + v$. *Dimenze* afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého linearního prostoru L.

D: Vektor x je *afinní kombinací* konečné množiny vektorů $a_1, a_2, \ldots a_n$ pokud $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Mnozina bodu/vektoru $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ neni afinní kombinací ostatních.

D: Pokud máme množinu vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$, můžeme uvažovat její *afinní obal*, což je množina všech vektorů A, které jsou afinní kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V.

Podobně jako linearní prostory, i konečné afinní prostory mají konečnou bazi, takže nemusíme uvažovat všechny konečné podmnožiny pro generovaní afinního obalu – stačí generovat afinní kombinace báze.

D: *Nadrovina* je libovolny afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d - 1$. V rovine tedy je kazda primka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolna rovina, atd.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

Příklad první

Pokud máme F regulární matici zobrazení dimenze n, potom pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a vektor $b \in \mathbb{R}^m$ určete:

a) co je obrazem množiny $\{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$.
b) co je vzorem množiny $\{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$.

Příklad druhý

Dokažte, že vektorový prostor V je izomorfní vektorovému prostoru W.

a)

$$V := \text{span}\{(1, 3, 2, 1)^T, (0, 0, 1, 1)^T\}$$

$$W := \text{span}\{(1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T\}$$

b)

$$V := \mathbb{R}^4$$

$$W := V^*$$

Kde V^* je duální vektorový prostor.

Příklad třetí

1. Mohou se dvě $2D$ afinní roviny protínat v jednom bodě, pokud jsme v $\mathbb{R}^4$?
2. *Na rozmyšlenou.* Mohou se dva $3D$ prostory (prostory dimenze 3) protínat v $\mathbb{R}^5$ v jednom bodě?

Příklad čtvrtý

1. Dokažte, že každý afinní prostor jde vyjádřit jako průnik konečně mnoha (afinních) nadrovin.
2. Dokažte, že každou afinní nadrovinu lze vyjádřit jako množina řešení soustavy $\{x|c^T x = b\}$.

Nápověda: Kdykoli uvažujete o afinním prostoru, zkuste si jej posunout pomocí vektoru $-v$ zpátky do počátku a dále uvažujte jen přidružený lineární prostor L.

Příklad pátý

Dokažte následující ekvivalenci, která dává snadný algebraický popis afinních prostorů:

Množina $F \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní podprostor, právě když $F = \{x \in \mathbb{R}^d | Ax = b\} \neq \emptyset$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a nějaký vektor $b \in \mathbb{R}^d$.

Jak se tvrzení změní pokud b nahradím za nulový vektor?