

Lineární algebra I – 1. cvičení

<http://tarken.krakonos.org/lingeбра1516.php>

9. 10. 2015

Příklad 1. Pro každé z následujících komplexních čísel napište jeho algebraický i goniometrický tvar a spočítejte jeho absolutní hodnotu a komplexně sdružené číslo:

a) $-5 + 5i$, b) $\frac{i-3}{2+i}$, c) i^{80} , d) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, e) $\frac{1}{2}e^{193\pi i}$.

Poznámka. Výpočet komplexní $\sqrt[3]{1}$.

Příklad 2. Spočítejte $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nadále budeme psát $(a, b)^T$ místo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Příklad 3. Co je řešením rovnice $2y - 1 = 3$? Co je řešením, pokud přidáme rovnici $x + y = 3$? Napište maticový zápis (druhou rovnici napište na první řádek), nakreslete jako průsečík přímek a jako součet vektorů.

Příklad 4. Popište průnik nadrovin $2w + 7x - y + 3z = 5$, $2w - y + 3z = 3$ a $2w - y = 1$ (vše ve čtyřech rozměrech, tedy v \mathbb{R}^4). Co je to geometricky (přímka, bod nebo prázdná množina)? Jaký je průnik, pokud přidáme $2w = -1$? Najděte čtvrtou rovnici tak aby průnikem byla prázdná množina.

Příklad 5. Nalezněte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned}2x + (2 + 2i)y + 2iz &= 1, \\(1 - i)x + (1 + 3i)y + (i - 1)z &= 0, \\(1 + i)x + (1 - i)y + (1 + i)z &= 1.\end{aligned}$$

Příklad 6. Pro každou polohu tří rovin v prostoru \mathbb{R}^3 (všechny rovnoběžné, průnik jeden bod, průnik přímka, ...) napište soustavu, která má takový tvar. Co znamená rovnoběžnost rovin pro soustavu rovnic?

Hint: počet řešení a dva řádky vyjadřující dvě rovnoběžné roviny

Příklad 7. Pod jakou podmínkou jsou body $(0, y_1)^T$, $(1, y_2)^T$, $(2, y_3)^T$ na jedné přímce? Pod jakou podmínkou jsou body $(0, 0)^T$, $(y_1, y_2)^T$, $(y_3, y_4)^T$ na jedné přímce?

Příklad 8. Alenka má o tři jablíčka víc než Bohouš. Pokud bychom dali každému z nich jedno jablíčko, měla by Alenka dokonce dvakrát tolik jablíček než Bohouš. Sestavte soustavu rovnic. Pokud si troufnete, vyřešte.

Příklad 9. Pro danou soustavu rovnic $Ax = b$, co se stane s řešením x , když

- Prohodíme dvě rovnice (změníme pořadí rovnic).
- Vynásobíme jednu rovnici nenulovým číslem.
- Přičteme jednu rovnici k druhé.

Použijte konkrétní zadání minulého příkladu a nakreslete, co se děje s průsečíky přímek a co se děje se sloupcovým pohledem na věc.

Co se děje s řešením, pokud předchozí (prohození, násobení a přičtení) provádíme se sloupci?

Pro zamýšlení: Je zbytečné, pokud by byly dvě rovnice stejné, nebo jedna rovnice násobkem druhé, nebo jedna rovnice součtem jiných dvou? Je zbytečný nějaký sloupec, pokud by byl stejný jako jiný, násobkem jiného či součtem jiných dvou?