SYLVESTEROVA RANKOVÁ NEROVNOST

PŘÍKLAD PRVNÍ Mějme matice $A \in R^{m \times n}$ a $B \in R^{n \times p}$. Zdůvodněte následující odhad pro hodnost jejich součinu:

$$r(A) + r(B) - n \leq r(AB).$$

Kde r značí hodnost (rank) matice a n značí dimenzi kernelu matice.

Důkaz:

Nejdříve si nerovnost přepíšeme za dodatečného předpokladu, že máme pouze matice $n \times n$, pomocí věty z přednášky $n = r(A) + n(A)$ na:

$$n(A) + n(B) \geq n(AB).$$

Pokud $x \in Ker(B)$, potom platí $Bx \in Ker(AB)$ a tedy také $x \in Ker(AB)$. Z toho víme, že $Ker(B)$ je vekrtorový podporstor $Ker(AB)$.

Potom pokud vezmeme $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jako bázi $Ker(B)$, tak ji můžeme doplnit na bázi $Ker(AB)$ přidáním vektorů $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l}$ např. dle Stenitzova lemmatu.

Nyní ukažme, že pro všechna $1 \leq i \leq l$ jsou $B\alpha_{k+i}$ lineárně nezávislé a patří do $Ker(A)$:

- $AB\alpha_{k+i} = 0$, jelikož α_{k_i} patří do báze $ker(AB)$.
- Nechť exituje netriviální lin kombinace, tž:

  $$\sum_{i=1}^{l} \beta_i B\alpha_{k+i} = 0.$$

  Potom ale:

  $$B \sum_{i=1}^{l} \beta_i \alpha_{k+i} = Bb.$$

  Pro vektor b, který je lin. kombinací prvků, které nepatří do $Ker(B)$ a tedy $Bb \neq 0$, což je SPOR.

Tím jsme ale dokázali, že $n(A) \geq l$ a tím i upravenou nerovnost $n(A) + n(B) \geq l + k = n(AB)$.

Zbývá vypořádat se s maticemi jiných rozměrů. Pokud je p či m menší než n, tak doplníme příslušnou matici nulami do správného rozměru. Tedy řešíme případ $p \geq n$ a zároveň $m \geq n$.

Potom ale použijme na A gaussovu eliminaci, kde dostaneme matici $A' := CA$, kde C je matice úprav GE. Potom platí $r(A) = r(A')$ z vlastností GE a také $r(AB) = r(A'B) = r(CAB)$, což plyne opět z vlastnosí GE. Tedy platí $r(A) + r(B) = r(A) + r(B) - n \leq r(AB) = r(A'B)$.

Nyní ale mám matici A' ranku nejvýše n a spodních $m - n$ řádků jsou samé nuly, které mně vytvoří samé nuly i v matici $A'B$ na spodních $m - n$ řádcích, tedy je mohu odstranit aniž bych ovlivnil hodnost libovolné z matic a získat tak matici A'' řádu $n \times n$. Potom již ale opět snadno dosadíme do $r(A'') + r(B) \leq r(A''B)$:

$$n - n(A'') + p - n(B) - n \leq p - n(A''B),$$

$$n(A'') + n(B) \geq n(A''B).$$

Což již máme dokázáno. $\square$