Jméno (přezdívka) ....

Všechny kroky pečlivě zdůvodněte, je to důležitější, než mít správný výsledek. Věty ze cvičení, či přednášky můžete používat bez DK, ale je potřeba uvést, že tak činíte a co konkrétně používáte. Pokud se však jedná o příklad ze cvičení či z domácího úkolu, chci jeho celé řešení pečlivě vysvětlit.

Každý příklad je za 5 bodů, ale obtížnost jednotlivých příkladů se může lišit.

Hodně štestí!

Příklad 1 Spočítejte inverzní matici k A nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zároveň určete dimenzi jádra (kernelu), řádkového i sloupcového prostoru A.

Příklad 2 Dokažte, že v grupě $\mathcal{G}$ platí, pouze pomocí axiomů grupy:

- Pokud pro všechny prvky $a, b \in \mathcal{G}$ platí $abab = a^2b^2$ potom $\mathcal{G}$ je komutativní.
- V $\mathcal{G}$ platí krácení zleva, tedy $ab = ac \Rightarrow b = c$, pro libovolné $a, b, c \in \mathcal{G}$.
- Určete čemu se rovná (zpropagujte inverzi na prvky grupy) $(abc^{-1})^{-1}$, pro $a, b, c \in \mathcal{G}$.

Příklad 3 Rozhoněte, zda je $\mathcal{T} := \{M, +, *\}$ těleso, kde M jsou reálné matice 2×2 vždy ve tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $+$ je klasické sčítání matice po složkách a $*$ je klasické maticové násobení.

Příklad 4 Ukažte, že množina B je bází vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$ a vyjádřete vektor $v \in V$ souřadnicemi vůči bázi B.

$$B := \{(2,1,1,0)^T, (0,1,1,0)^T, (1,1,1,3)^T\},$$
$$V := \operatorname{span}\{(1,0,0,0)^T, (0,3,3,5)^T, (2,1,1,4)^T, (1,1,1,0)\},$$
$$v := (1,1,1,0)^T.$$

Příklad 5 Mějme u, v, w lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$. Určete dimenzi prostoru W generovaném vektory:

$$u + v - 3w,$$
$$2u + v,$$
$$-u + v - 7w.$$

Zárověň určete nějakou bázi W.