3. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Maticové operace

Příklady z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Pro danou soustavu rovnic $Ax = 0$ víme, co se stane s řešením x, když:

- Prohodíme dvě rovnice (změníme pořadí rovnic).
- Vynásobíme jednu rovnici nenulovým číslem.
- Přičteme jednu rovnici k druhé.

Rozmyslete se, co se stane:

- pokud předchozí (prohození, násobení a přičtení) provádíme se sloupci (pouze před rovností)?
- pokud by byly dvě rovnice stejné, nebo jedna rovnice násobkem druhé, nebo jedna rovnice součtem jiných dvou? Je zbytečný nějaký sloupec, pokud by byl stejný jako jiný, násobkem jiného či součtem jiných dvou?

Použijte konkrétní zadání z předminulého příkladu a nakreslete, co se děje s průsečíky přímek a co se děje se sloupcovým pohledem na věc.

PŘÍKLAD DRUHÝ Vzhledem k parametru a řešte následující soustavu rovnic:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

PŘÍKLAD TŘETÍ Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte (kdykoliv má výraz smysl):

$$(A + 4B) + C, \quad (A + B)^T \cdot 2C, \quad (B \cdot C) \cdot A^T, \quad (B \cdot 3A^T) + C, \quad C \cdot (B^T - (\pi A)^T).$$

Najděte matici C', takovou, že platí: $C \cdot C' = C' \cdot C = I_2$.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Najděte všechny matice, které komutují s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte následující vztahy pro reálné číslo α a matice A, B a C tvaru $n \times m$:

1. $A + 0 = A$
2. $A + (-1)A = 0$
3. $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
5. $(A + B)^T = A^T + B^T$
6. $(A + B) + C = A + (B + C)$
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
8. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

PŘÍKLAD ŠESTÝ Určete, které matice jsou regulární:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}.$$

Jakou hodnost má součin dvou regulrních matic?