4. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Regularita a inverze

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ   Určete, které matice jsou regulární:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}.$$

Jakou hodnost má součin dvou regulrních matic?

PŘÍKLAD DRUHÝ   Rozhodněte (a dokažte/vyvraťte), které z následujících definic *regulárnosti* matice A tvaru $n \times n$ jsou ekvivalentní:

- Soustava $Ax = 0$ má právě jedno řešení.
- Existuje vektor b takový, že soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení.
- Pro každý vektor b platí, že soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení.
- Hodnost matice je rovna n.

PŘÍKLAD TŘETÍ   Najděte inverzní matice k maticím:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ   Dokažte následující vztahy pro matice A, B a C tvaru $n \times m$:

1. $I_n \cdot A = A \cdot I_m = A$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

PŘÍKLAD PÁTÝ   Rozhodněte zda platí (a dokažte/vyvraťte):

- Je inverzní matice určena jednoznačně?
- Je inverzní matice regulární matice regulární?
- Bude matice A regulární, pokud jsou regulární obě matice B i C a platí ně vztah $A \cdot B = C$?