4. DOMÁCÍ ÚKOL Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory a lineární zobrazení

Odevzdávejte na cvičení nebo emailem na `tarken@kam.mff.cuni.cz` *do 3.1.2017 10:40.*
Při vymýšlení úkolů můžete spolupracovat, chtěl bych ale, abyste řešení sepsali každý sám.

PŘÍKLAD PRVNÍ   Mějte matice $A \in R^{m \times n}$ a $B \in R^{n \times p}$. Zdůvodněte následující odhad pro hodnost jejich součinu přičemž r značí hodnost (rank) matice:

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

[2 body]

PŘÍKLAD DRUHÝ   Buď $f : U \to V$ lineární zobrazení mezi vektorovými prostory U a V, potom:

- $\mathrm{Ker}(f)$ je podprostor U,
- pro každé $x_1, \ldots, x_n \in U$ platí: $f(\mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}) = \mathrm{span}\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$.

[2 body]

PŘÍKLAD TŘETÍ

Mějme $F : V \to W$ lineární zobrazení z vektorového prostoru V do prostoru W nad tělesem $\mathbb{R}$ definované následujícím předpisem:

$$\begin{aligned} F((0,1,2,3)^T) &= (1,0,-2)^T, \\ F((1,1,1,0)^T) &= (1,2,3)^T, \\ F((0,0,1,1)^T) &= (1,0,0)^T, \\ F((0,1,0,3)^T) &= (1,0,-1)^T. \end{aligned}$$

Všechny vektory jsou zadané vzhledem ke kanonické bázi.

Určete a odůvodněte následující:

- Matici zobrazení A_F,
- bázi $Ker(A_F)$, bázi prostoru V a bázi prostoru W,
- je zobrazení F prosté?

[3 body]

PŘÍKLAD ČTVRTÝ   Najděte matici přechodu od báze B k bázi B' nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ a určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B'. Dále najděte matici přechodu od báze B' zpět k bázi B.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} a_1 + 1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Pro libovolné $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_7$.

[3 body]