

# 5. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Grupy a tělesa

**PŘÍKLAD PRVNÍ** Rozhodněte, které z následujících struktur jsou (Abelovy) grupy:

- $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$ ,  $(\mathbb{N}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}, *)$ ,  $(\mathbb{C}, *)$ ,  $(\mathbb{Q}, *)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}, -)$ .
- $(\mathbb{R}^n, +)$ ,  $(\{\text{matice typu } n \times n\}, +)$ ,  $(\{\text{matice typu } n \times n\}, \cdot)$ ,  $(\{\text{regulární matice typu } n \times n\}, \cdot)$ .  
(zde  $+$  je maticové sčítání a  $\cdot$  je maticové násobení, vše nad reálnými čísly.)
- $(\mathbb{Z}_3, +_{\text{mod } 3})$ ,  $(\mathbb{Z}_6, +_{\text{mod } 6})$ ,  $(\mathbb{Z}_8, *_{\text{mod } 8})$ ,  $(\mathbb{Z}_6, *_{\text{mod } 6})$ ,  $(\mathbb{Z}_n, +_{\text{mod } n})$ ,  $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, *_{\text{mod } n})$  (pro které  $n$  není),  $(2\mathbb{Z}, +)$

Kde

$$\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\},$$

$$n\mathbb{Z} := \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\},$$

$a +_{\text{mod } n} b :=$  zbytek po vydělení čísla  $a + b$  číslem  $n$ ,

$a *_{\text{mod } n} b :=$  zbytek po vydělení čísla  $a * b$  číslem  $n$ .

**PŘÍKLAD DRUHÝ** Ukažte, že v každé grupě platí:

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$$

**PŘÍKLAD TŘETÍ** Nechť  $(G, \circ)$  je grupa a  $g \in G$ . Potom  $(\{g^n, (g^n)^{-1} \mid n \in \{0, 1, 2, \dots\}\}, \circ)$  je také grupa.

**PŘÍKLAD ČTVRTÝ** Ukažte, že následující struktura je těleso:

- $\mathbb{Q}$  spolu s násobením a sčítáním.
- $\mathbb{C}$  spolu s násobením a sčítáním.

**PŘÍKLAD PÁTÝ** Řešte následující soustavu rovnic v  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_5$ ,  $\mathbb{Z}_{11}$ :

$$x + y + 3z = a$$

$$2x - ay + z = 1$$

**PŘÍKLAD ŠESTÝ** Spočítejte inverzní matici k matici  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$  v  $\mathbb{Z}_7$  a v  $\mathbb{Z}_{11}$ .

**PŘÍKLAD SEDMÝ** Určete hodnoty  $2^{101}$ ,  $3^{1001}$ ,  $4^{100001}$  v tělese  $\mathbb{Z}_{17}$ .