6. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory — úvod

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Ukažte, že následující struktura je těleso:

1. $\mathbb{Q}$ spolu s násobením a sčítáním.
2. $\mathbb{C}$ spolu s násobením a sčítáním.

PŘÍKLAD DRUHÝ Určete hodnoty $2^{101}, 3^{1001}, 4^{100001}$ v tělese $\mathbb{Z}_{17}$.

...ještě permutace...

PŘÍKLAD TŘETÍ Pro následující permutaci p určete grafy, cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko, inverzní permutaci. (Pro q to samé nemusíte dělat.) Dále určete složení permutací $p \circ q$ a $q \circ p$.

$$p = (6, 4, 1, 5, 3, 2)$$
$$q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Mějme permutaci zadanou cykly:

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7)$$

Spočítejte p^9 a p^{-14}.

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

PŘÍKLAD PÁTÝ Základní vlastnosti vektorových prostorů (přímo z axiomů): Pro vektorový prostor V nad tělesem T:

1. Pro všechny $v \in V$ platí, že $0v = \vec{0}$.
2. Pro všechny $\alpha \in T$ platí, že $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.
3. Pro všechny $v \in V$ a všechny $\alpha \in T$ platí, že kdykoliv $\alpha v = \vec{0}$, potom $\alpha = 0$ nebo $v = \vec{0}$.
4. Pro všechny $v \in V$ platí, že opačný vektor k vektoru v je vektor $(-1)v$. (tzn. $v + (-1)v = \vec{0}$)

PŘÍKLAD ŠESTÝ Ukažte, které z následujících množin (a za jakých předpokladů) tvoří vektorový prostor:

1. Geometrické příklady: čtverec; kruh; $\{(t, 2t, 3t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$; $\{(2s + t, s - t, 3s + t)^T \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. (jako podprostory $\mathbb{R}^n$)
2. Prostor polynomů nad nějakým tělesem a jeho podprostory: polynomy stupně nejvýše n.
3. Prostor funkcí.

PŘÍKLAD SEDMÝ Rozhodněte zda struktura $(\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}, \oplus, \odot)$ nad tělesem $\mathbb{Q}$, kde $r_1 \oplus r_2 = r_1 \cdot r_2$ a $\alpha \odot r = r^\alpha$, je vektorový prostor.