7. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory — pokračování

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Základní vlastnosti vektorových prostorů (přímo z axiomů): Pro vektorový prostor V nad tělesem T:

1. Pro všechny $v \in V$ platí, že $0v = \vec{0}$.
2. Pro všechny $\alpha \in T$ platí, že $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.
3. Pro všechny $v \in V$ a všechny $\alpha \in T$ platí, že kdykoliv $\alpha v = \vec{0}$, potom $\alpha = 0$ nebo $v = \vec{0}$.
4. Pro všechny $v \in V$ platí, že opačný vektor k vektoru v je vektor $(-1)v$. (tzn. $v + (-1)v = \vec{0}$)

PŘÍKLAD DRUHÝ Ukažte, které z následujících množin (a za jakých předpokladů) tvoří vektorový prostor:

1. Geometrické příklady: čtverec; kruh; $\{(t, 2t, 3t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$; $\{(2s+t, s-t, 3s+t)^T \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. (jako podprostory $\mathbb{R}^n$)
2. Prostor polynomů nad nějakým tělesem a jeho podprostory: polynomy stupně nejvýše n.
3. Prostor funkcí.

PŘÍKLAD TŘETÍ Rozhodněte zda struktura $(\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}, \oplus, \odot)$ nad tělesem $\mathbb{Q}$, kde $r_1 \oplus r_2 = r_1 \cdot r_2$ a $\alpha \odot r = r^\alpha$, je vektorový prostor.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Zjistěte, zda se vektor v dá získat jako lineární kombinace vektorů z množiny A nad tělesem T. Kde

1. $v = (5, 2, -3)^T$, $A = \{(4, 1, -2)^T, (1, 1, -1)^T, (3, 4, -1)^T\}$ a $T = \mathbb{R}$,
2. $v = (7, -2, \lambda)^T$, $A = \{(2, 3, 5)^T, (1, -6, 1)^T, (5, 7, 8)^T\}$ a $T = \mathbb{R}$ (v závislosti na $\lambda \in \mathbb{R}$),
3. $v = (i, -1)^T$, $A = \{(1, i)^T, (i, 1-i)^T\}$ a $T = \mathbb{C}$,
4. $v = (1, 0, 1)^T$, $A = \{(2, 1-i, 1+i)^T, (2+2i, 1+3i, 1-i)^T, (2, i-1, 1+i)^T\}$ a $T = \mathbb{C}$.

PŘÍKLAD PÁTÝ Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující množiny lineárně nezávislé (a pokud jsou lineárně závislé, vyjádřete nějaký vektor jako lineární kombinaci ostatních):

1. $\{u, u+v, u+w\}$,
2. $\{u+v, u+w, v+w\}$,
3. $\{u+v, u-v, u+w, u-w\}$,

PŘÍKLAD ŠESTÝ Dokažte, že vektorový podprostor generovaný dvěma vektory $\mathbb{R}^3$ (tzn. lineární obal těchto vektorů) je buď přímka procházející počátkem, rovina procházející počátkem, nebo pouze počátek.

PŘÍKLAD SEDMÝ Najděte bázi a určete dimenzi prostoru W obsahující vektor $w = (1, -5, -4, -6)^T$ a která je zároveň lineárním obalem vektorů $u_1 = (1, 2, 3, 4)^T, u_2 = (1, 0, 1, 0)^T$ a $u_3 = (3, -1, 2, 2)^T$.

PŘÍKLAD OSMÝ Ukažte, že množina B je bází vektorového prostoru V a vyjádřete vektor $v \in V$ souřadnicemi vůči bázi B. Kde

1. $B = \{(2, 1, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (1, 1, 3)^T\}$, $v = (1, 1, 1)$ a $V = \mathbb{R}^3$,
2. $B = \{(1, 2, 1)^T, (2, 9, 0)^T, (3, 3, 4)^T\}$, $v = (0, 2, 1)$ a $V = \mathbb{R}^3$,
3. $B = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$, $v = 2x^2 + 1$ a $V =$ množina polynomů stupně nejvýše 2.
4. $B = \{x^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$, $v = 4x^3 + 2x + 3$ a $V =$ množina všech polynomů.

Příklad devátý (nad $\mathbb{R}$): Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru daného soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$