8. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory — generátory a báze

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Najděte bázi a určete dimenzi prostoru W obsahující vektor $w = (1, -5, -4, -6)^T$ a která je zároveň lineárním obalem vektorů $u_1 = (1, 2, 3, 4)^T, u_2 = (1, 0, 1, 0)^T$ a $u_3 = (3, -1, 2, 2)^T$.

PŘÍKLAD DRUHÝ Ukažte, že množina B je bází vektorového prostoru V a vyjádřete vektor $v \in V$ souřadnicemi vůči bázi B. Kde

1. $B = \{(2, 1, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (1, 1, 3)^T\}$, $v = (1, 1, 1)$ a $V = \mathbb{R}^3$,
2. $B = \{(1, 2, 1)^T, (2, 9, 0)^T, (3, 3, 4)^T\}$, $v = (0, 2, 1)$ a $V = \mathbb{R}^3$,
3. $B = \{(1, 1, 4)^T, (1, 4, 3)^T, (3, 1, 1)^T\}$, $v = ...$ a $V = \mathbb{Z}_5^3$,
4. $B = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$, $v = 2x^2 + 1$ a $V =$ množina polynomů stupně nejvýše 2.
5. $B = \{x^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$, $v = 4x^3 + 2x + 3$ a $V =$ množina všech polynomů.

PŘÍKLAD TŘETÍ Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru daného soustavou rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Najděte bázi podprostoru vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ (resp. $\mathbb{Z}_7^3$) daného řešením rovnic v tělese $\mathbb{Z}_5$ (resp. $\mathbb{Z}_7$) a určete jeho dimenzi:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD PÁTÝ Rozhodněte, zda vektory $(1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 1, 1)$ generují $\mathbb{R}^4$, resp. $\mathbb{Z}_2^4$.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Určete dimenzi řádkového, sloupcového prostoru a také dimenzi jádra následující matice. Poté charakterizujte všechny vektory, které patří do příslušných vektorových prostorů. Počítejte nad $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$