10. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory a lineární zobrazení

Příklad první Mějme vektrový prostor V nad tělesem $\mathbb{Z}_3$ definován jako:

$$V := \operatorname{span}\{(0,1,0,1)^T, (1,2,1,0)^T, (0,0,2,1)^T\}.$$

Doplňte LNZ vektory $(1,1,1,2)^T$ a $(2,2,0,0)^T$ tak, aby tvořili bázi V.

Příklad druhý Spočítejte $F(w)$ kde $F\colon V \to W$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory V a W s bázemi B_1 a B_2 zadané následujícím předpisem (a vyjádřete výsledek vzhledem k bázi B_2):

a.

$$\begin{aligned} V, W &\text{ jsou } \mathbb{R}^3 \text{ a } \mathbb{R}^2 \\ B_1, B_2 &\text{ jsou kanonické báze} \\ v &= (1,3,8)^T \text{ nebo obecně } (x,y,z)^T \end{aligned}$$

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}.$$

b.

$$\begin{aligned} V, W &\text{ jsou } \mathbb{R}^3 \text{ a } \mathbb{R}^2 \\ B_1 &= \{(1,1,0)^T, (0,1,1)^T, (1,0,1)^T\}, B_2 = \{(1,0)^T, (2,1)^T\} \\ v &= (1,3,8)^T_{B_1} \end{aligned}$$

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}.$$

c.

$$\begin{aligned} B_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}, \quad B_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ v &= u_1 + 2u_2 - u_3 \\ F(u_1) &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \quad F(u_2) = 2v_1 - 2v_3, \quad F(u_2) = v_1 + 2v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Příklad třetí Spočítejte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi pro:

$$F((1,1)^T) = (2,1)^T, \text{ a } F((-1,1)^T) = (6,3)^T.$$

A pro:

$$\begin{aligned} F((x_1,x_2)^T) &= (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)^T, \\ F((x_1,x_2)^T) &= (x_1, x_2)^T, \\ F((x_1,x_2,x_3)^T) &= (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)^T, \\ F((x_1,x_2,x_3)^T) &= (4x_1, 7x_2, -8x_3)^T. \end{aligned}$$

Příklad čtvrtý Najděte matici přechodu od báze B k bázi B' nad tělesem $\mathbb{R}$ a určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B'. Kde

1.
$$B = \text{ kanonická}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \text{ kanonická}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3.
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4.
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

PŘÍKLAD PÁTÝ Určete jádro a obraz lineárního zobrazení, jejich dimenze a určete jestil je zobrazení prosté pro lineární zobrazení F zadané následovně;

1. $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$
2. $F((1,0,0)^T) = (2,3)^T, \quad F((1,1,1)^T) = (0,1)^T, \quad F((-1,3,-1)^T) = (1,4)^T$
3. $F((1,0)) = 2x + x^2, \quad F((0,1)^T) = 3x^3 + x$
4. $F\colon X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$