11. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární zobrazení — pokračování

Opakování:

PŘÍKLAD PRVNÍ Spočítejte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi pro:

$$F((1,1)^T) = (2,1)^T, \text{ a } F((-1,1)^T) = (6,3)^T.$$

A pro:

$$F((x_1,x_2)^T) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)^T,$$
$$F((x_1,x_2)^T) = (x_1,x_2)^T,$$

A pro:

$$F((x_1,x_2,x_3)^T) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)^T,$$
$$F((x_1,x_2,x_3)^T) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)^T.$$

PŘÍKLAD DRUHÝ Ukažte, že $F(0) = 0$ a $F(-v) = -F(v)$ pro lineární zobrazení F.

PŘÍKLAD TŘETÍ Rozhodněte, zda následující matice může být maticí přechodu $\mathbb{R}^4$ pro vhodné báze:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -7 & 9 & 13 & 14 \end{pmatrix}.$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Určete jádro a obraz lineárního zobrazení, jejich dimenze a určete jestil je zobrazení prosté pro lineární zobrazení F zadané následovně;

1. $F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$
2. $F((1,0,0)^T) = (2,3)^T, \quad F((1,1,1)^T) = (0,1)^T, \quad F((-1,3,-1)^T) = (1,4)^T$
3. $F((1,0)) = 2x + x^2, \quad F((0,1)^T) = 3x^3 + x$
4. $F\colon X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$

PŘÍKLAD PÁTÝ Rozhodněte jestli platí následující výrok: Nechť V je vektorový prostor a $F\colon V \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení. Nechť W je jádro zobrazení F.

Pokud $W \neq V$ a $v_0 \in V \setminus W$, pak každý prvek V lze také zapsat jako $w + cv_0$ pro nějaké $w \in W$ a nějaké c.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Rozmyslete si a rozhodněte, zda jsou následující zobrazení lineární? Pokud ano, určete jejich matici v prostoru $\mathbb{R}^2$ a rozmyslete si, zda se jedná o prosté zobrazeni:

- rotace o úhel φ,
- projekce na osu y,
- Zvětšení dimenze,

- k-násobné zvětšení,
- posunutí o vektor v.

D: *Izomorfismus* je bijektivní zobrazení, které zachovává strukturu. Tedy v případě izomorfismu vektorových prostorů V, W nad tělesem $\mathbb{T}$, hledáme bijekci $b : V \to W$ takovou, že $\forall u, v \in V$ a $\forall \alpha \in \mathbb{T}$ platí:

$$b(u + v) = b(u) + b(v)$$
$$b(\alpha u) = \alpha b(u).$$

D: Vektorovému prostoru všech lineárních forem (Lineární zobrazení do $\mathbb{R}$) vektorového prostoru V říkáme *duální prostor* V a značíme ho V^*.

PŘÍKLAD SEDMÝ Pokud máme F regulární matici zobrazení dimenze n, potom pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a vektor $b \in \mathbb{R}^m$ určete:

a) co je obrazem množiny $\{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$.
b) co je vzorem množiny $\{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$.

PŘÍKLAD OSMÝ Dokažte, že vektorový prostor V je izomorfní vektorovému prostoru W.

a)
$$V := \operatorname{span}\{(1, 3, 2, 1)^T, (0, 0, 1, 1)^T\}$$
$$W := \operatorname{span}\{(1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T\}$$

b)
$$V := \mathbb{R}^4$$
$$W := V^*.$$