1. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Prostory se skalárním součinem

Příklad první Pro standartní skalární součin $\langle x, y\rangle$ na $\mathbb{R}^n$ určete následující pro zadané vektory x a y:

- skalární součin vektorů x a y,
- jejich příslušné indukované normy,
- vzálenost x a y,
- a zda-li jsou navzájem kolmé.

a) $x^T = (4, 2, 3),\ y^T = (1, 5, -2)$,
b) $x^T = (3, 1, -2),\ y^T = (1, -3, 5)$.

Příklad druhý Nyní si definujme další binární operace pro vektorový prostor $\mathbb{R}^n$:

i.) $\langle x, y\rangle_1 := (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)$,
ii.) $\langle x, y\rangle_2 := \sum_i(\alpha_i x_i y_i)$, pro $\alpha_i > 0$,
iii.) $\langle x, y\rangle_3 := \sum_i |\max(x_i, y_i)|$.

Rozhodněte zda-li se jedná o skalární součin a pokud ano, určete následující:

- jednotkovou kružnici pro prostor $\mathbb{R}^2$,
- skalární součin vektorů x a y,
- jejich příslušné indukované normy,
- vzálenost x a y,
- a zda-li jsou navzájem kolmé.

a) $x^T = (4, 2, 3),\ y^T = (1, 5, -2)$,
b) $x^T = (3, 1, -2),\ y^T = (1, -3, 5)$.

Příklad třetí Mějme dva kolmé vektory u a v. Dále nechť $||u|| = 12, ||v|| = 5$. Určete $||u + v||$ a $||u - v||$.

Příklad čtvrtý Pro vektorový prostor V podprostor $\mathbb{R}^n$ definujme

$$V^\perp := \{u \big| u \perp v, v \in V, u \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dále pro podprostory V, U prostoru $\mathbb{R}^n$ říkáme $V \perp U$ pokud platí $v \perp u$ pro všechna $v \in V$ a $u \in U$.

Mějme prostory U, V, W podprostory $\mathbb{R}^n$ Rozhodněte zda a platí následující tvrzení a případně dokažte, či nalezněte protipříklad:

- $V \perp W$ potom $V^\perp \perp W^\perp$,
- $V \perp W$ a $W \perp Z$ potom $V \perp Z$,
- $V \perp W$ potom $V \cap W = \{0\}$,
- $(V^\perp)^\perp = V$.

Příklad pátý Zkluste vymyslet nějakou vlastní normu (ktrá dnes ještě nebyla) a určete, jak bude vypadat jednotková kružnice v prostoru R^2.

Mějme $S := \{x \big| ||x|| = 1\}$ jednotkovou sféru a $B := \{x \big| ||x|| \leq 1\}$ ve vektorovém prostoru s normou. Potom zkuste dokázat, že pro libovolnou normu platí:

- S obsahuje přesně dva body na každé přímce procházející počátkem.
- B je středově symetrická.
- B je konvexní (tedy platí pro každé $a, b \in B$ potom $(\alpha a + (1 - \alpha)b) \in B$ pro nezáporné α.)

Příklad šestý   Ze skalárního součinu si přirozeně definujme relaci kolmosti. Rozhodněte zda je tato relace (i)reflexivní, (anti)symetrická, či tranzitivní.