

1. DOMÁCÍ ÚKOL Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Prostory se skalárním součinem

Odevzdávejte na emailu na tarken@kam.mff.cuni.cz do 28.3.2017 10:40.

Při vymýšlení úkolů můžete spolupracovat, chtěl bych ale, abyste řešení sepsali každý sám.

Stopa $\text{trace}(A)$ čtvercové matice A řádu n je definována jako:

$$\text{trace}(A) := \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

PŘÍKLAD PRVNÍ

Ukažte, že $\langle A, B \rangle := \text{trace}(A^T B)$, kde A, B jsou matice z prostoru $\mathbb{R}^{m \times n}$, je skalární součin.

[3 body]

PŘÍKLAD DRUHÝ

Rozhodněte zda platí následující tvrzení a případně dokažte, či nalezněte protipříklad. Mějme vektory $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$ na sebe navzájem kolmé, potom matice $I - q_1 q_1^T, \dots, I - q_n q_n^T$ navzájem komutují vůči operaci násobení.

[3 body]

PŘÍKLAD TŘETÍ Buď P matice projekce do prostoru U podprostoru \mathbb{R}^n . Dokažte, že

$$\text{rank}(P) = \text{trace}(P).$$

[3 body]

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Rozhodněte zda platí a případně dokažte, či nalezněte protipříklad.

Součet ortogonálních matic stejného řádu je opět ortogonální matice.

[1 bod]