2. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Prostory se skalárním součinem — Ortogonální doplněk a G.S. ortonormalizace

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Pro vektorový prostor V podprostor $\mathbb{R}^n$ definujme

$$V^\perp := \{u \big| u \perp v, v \in V, u \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dále pro podprostory V, U prostoru $\mathbb{R}^n$ říkáme $V \perp U$ pokud platí $v \perp u$ pro všechna $v \in V$ a $u \in U$.

Mějme prostory U, V, W podprostory $\mathbb{R}^n$ Rozhodněte zda a platí následující tvrzení a případně dokažte, či nalezněte protipříklad:

- $(V^\perp)^\perp \subseteq V$.

PŘÍKLAD DRUHÝ Zkluste vymyslet nějakou vlastní normu (ktrá dnes ještě nebyla) a určete, jak bude vypadat jednotková kružnice v prostoru R^2.

Mějme $S := \{x \big| ||x|| = 1\}$ jednotkovou sféru a $B := \{x \big| ||x|| \leq 1\}$ ve vektorovém prostoru s normou. Potom zkuste dokázat, že pro libovolnou normu platí:

- S obsahuje přesně dva body na každé přímce procházející počátkem.
- B je středově symetrická.
- B je konvexní (tedy platí pro každé $a, b \in B$ potom $(\alpha a + (1-\alpha)b) \in B$ pro nezáporné α.)

PŘÍKLAD TŘETÍ Ze skalárního součinu si přirozeně definujme relaci kolmosti. Rozhodněte zda je tato relace (i)reflexivní, (anti)symetrická, či tranzitivní.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Rozhodněte zda platí:

Každý ortogonální systém vektorů $z_1, \ldots, z_n$ je lineárně nezávislý.

PŘÍKLAD PÁTÝ Mějte matici A a vektor b tvořící soustavu rovnic $Ax = b$ a mající alespoň jedno řešení. Dokažte, že pro něj platí:

- Vektor $b \in S(A)$.
- Existuje právě jedno $x \in R(A)$ splňující $Ax = b$ (označme ho x_r).
- Pro všechna x splňující $Ax = b$ existuje $x_n \in \mathrm{Ker}(A)$ tž $x = x_r + x_n$.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Ukažte, že furierovi koeficienty opravdu potřebují v předpokladech ortonormální bázi. Tedy, že nám nestačí libovolná ortogonální báze.

PŘÍKLAD SEDMÝ V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standartním skalárním součinem určete G.S. ortonormální bázi řádkového prostoru pro následující matice:

- $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Pro prostor $\mathbb{Z}_5^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Poté zkuste tyto báze doplnit tak, aby to byly báze $\mathbb{R}^4$, respektive $\mathbb{Z}_5^4$.