3. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Prostory se skalárním součinem — G.S. ortonormalizace a projekce

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Mějte matici A a vektor b tvořící soustavu rovnic $Ax = b$ a mající alespoň jedno řešení. Dokažte, že pro něj platí:

- Vektor $b \in S(A)$.
- Existuje právě jedno $x \in R(A)$ splňující $Ax = b$ (označme ho x_r).
- Pro všechna x splňující $Ax = b$ existuje $x_n \in \mathrm{Ker}(A)$ tž $x = x_r + x_n$.

PŘÍKLAD DRUHÝ V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standartním skalárním součinem určete G.S. ortonormální bázi řádkového prostoru pro následující matice:

-
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
-
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Poté zkuste tyto báze doplnit tak, aby to byly báze $\mathbb{R}^4$, respektive $\mathbb{Z}_5^4$.

PŘÍKLAD TŘETÍ V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standartním skalárním součinem určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru a souřadnice této projekce vzhledem k bázi Z.

-
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
-
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dále spočítejte projekci do ortogonálního doplňku a opět souřadnice vzhledem k bázi ortogonálního doplňku.

Jak se příklad změní, pokud nemáme standartní skalární součin, ale například:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + x_4 y_4?$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Určete vzdálenost bodu $(5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $(8, -1, 1, -2)^T$ a $(4, -2, 2, -1)^T$.

PŘÍKLAD PÁTÝ Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $Ax = b$ pro:

-
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \; b = (10, 5, 13, 9)^T.$$

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \; b = (1, 2, 1, 1)^T.$$

Jak se příklad změní, pokud nemáme standartní skalární součin, ale například:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + x_4 y_4?$$