3. DOMÁCÍ ÚKOL Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Pozitivní definitnost

Odevzdávejte na cvičení nebo emailem na `tarken@kam.mff.cuni.cz` *do 16.5.2017 10:40.*
Při vymýšlení úkolů můžete spolupracovat, chtěl bych ale, abyste řešení sepsali každý sám.

Příklad první

Pro jaká $p \in \mathbb{R}$ je následující matice pozitivně definitní? a pro která p je matice pozitivně semidefinitní?

$$\begin{pmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & p & 1 \\ -1 & 1 & p \end{pmatrix}$$

Poté spočtěte choleského rozklad za předpokladu, že máte p takové, aby matice byla pozitivně definitní.

[5 bodů]

Příklad druhý

Buďte $A.B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrické matice. Nechť jsou všechna vlastní čísla matice A větší než vlastní čísla matice B. Dokažte, že $A - B$ je pozitivně definitní.

[3 body]

Příklad třetí

Vzpomeňte si na 4. cvičení, kde jsme dokazovali s nadbytečným předpokladem (že skalární součin lze vyjádřit jako násobení vhodnou maticí $\langle x, y \rangle = x^T Ay$) následující tvrzení. Dokažte ho nyní obecně:

Definujme $\langle x, y \rangle := x^T Ay$ pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ a matici $A \in R^{n \times n}$. Dokažte, že se jedná o skalární součin právě tehdy, když je matice A pozitivně definitní.

[2 body]