4. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Prostory se skalárním součinem — metoda nejmenších čtverců a ortogonální matice

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $Ax = b$ pro:

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \, b = (10, 5, 13, 9)^T.$$
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \, b = (1, 2, 1, 1)^T.$$

Jak se příklad změní, pokud nemáme standartní skalární součin, ale například:

$$\langle x, y \rangle := x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_4y_4?$$

PŘÍKLAD DRUHÝ Dokažte, že norma definovaná skalárním součinem splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

Potom rozhodněte zda jsou normy $||x||_1 := \sum_i |x_i|$ a $||x||_\infty := \max_i |x_i|$ definované nějakým skalárním součinem.

PŘÍKLAD TŘETÍ O symetrické reálné matici A řekneme, že je *pozitivně definitní* pokud pro ni platí $x^T Ax > 0$ pro všechna nenulová x.

Definujme skalární součin jako $\langle x, y \rangle := x^T Ay$. Dokažme, že se jedná o skalární součin právě tehdy když je matice A pozitivně definitní.

Druhou implikaci ověřujte za předpokladu, že libovolný skalární součin lze vyjádřit jako násobení vhodnou maticí $\langle x, y \rangle = x^T Ay$.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Na první hodině jsme měli příklad: *Mějme $S := \{x \big| ||x|| = 1\}$ jednotkovou sféru a $B := \{x \big| ||x|| \leq 1\}$ ve vektorovém prostoru s normou. Potom zkuste dokázat, že pro libovolnou normu platí:*

- *S obsahuje přesně dva body na každé přímce procházející počátkem.*
- *B je středově symetrická.*
- *B je konvexní (tedy platí pro každé $a, b \in B$ potom $(\alpha a + (1 - \alpha)b) \in B$ pro nezáporné α.)*

Nyní zkuste dokázat opačnou implikaci, kde normu definujeme jako $||x|| := |\alpha|$, kde $x = \alpha y$ pro $y \in S$.

Tedy začínáme s uzavřenou konvexní symetrickou dle počátku množinou B a S její hranicí neobsahující 0.

PŘÍKLAD PÁTÝ Nechť $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ jsou ortogonální. Je bloková matice $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ ortogonální?

Příklad šestý

- Najděte všechny ortogonální matice řádu 1 a 2.
- Najděte všechny diagonální ortogonální matice řádu n.

Příklad sedmý

Ukažte, že Hadamardovi matice jsou ortogonální.

Hadamardovi matice jsou definovány rekurzivně takto:

$$H_0 := \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad H_m := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix}.$$