5. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Determinanty

Z minula:

Příklad první

- Najděte všechny ortogonální matice řádu 1 a 2.
- Najděte všechny diagonální ortogonální matice řádu n.

Příklad druhý

Ukažte, že Hadamardovi matice jsou ortogonální.

Hadamardovi matice jsou definovány rekurzivně takto:

$$H_0 := \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad H_m := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Příklad třetí

Spočítejte determinanty následujících matic: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Příklad čtvrtý

Spočítejte determinanty následujících matic:

a) $\begin{pmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$

Příklad pátý

Spočítejte determinanty následujících matic:

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ \sin y & \cos y & 1 \\ \sin z & \cos z & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \log_b a & \log_c a \\ \log_a b & 1 & \log_c b \\ \log_a c & \log_b c & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad šestý

Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavy $Ax = b$:

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = (-2, 2, -1, 4)^T$$

- počítejte v Z_5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = (1, 2, 3)^T$$

Příklad sedmý

Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory:

$$a = (3, 1, 1)^T, b = (2, 1, 1)^T, c = (2, 3, 2)^T.$$

Příklad osmý

Určete počet koster v následujícím grafu: