6. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Determinanty a adjungovaná matice

Z minula:

Příklad první — Spočítejte determinanty následujících matic:

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ \sin y & \cos y & 1 \\ \sin z & \cos z & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \log_b a & \log_c a \\ \log_a b & 1 & \log_c b \\ \log_a c & \log_b c & 1 \end{pmatrix}$$

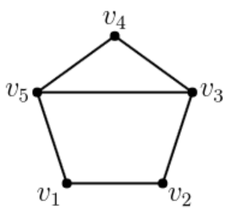
Příklad druhý — Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavy $Ax = b$:

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = (-2, 2, -1, 4)^T$$
- počítejte v Z_5.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = (1, 2, 3)^T$$

Příklad třetí — Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory:

$$a = (3, 1, 1)^T, b = (2, 1, 1)^T, c = (2, 3, 2)^T.$$

Příklad čtvrtý



Určete počet koster v následujícím grafu:

D: Buď A matice v $\mathbb{T}^{n\times n}$, kde $n \geq 2$ potom $\mathrm{adj}(A) \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je *adjungovaná matice* definovaná jako:

$$\mathrm{adj}(A)_{i,j} := (-1)^{i+j}\det(A^{ji}),$$

pro $i, j \in [n]$, kde A^{ij} značí matici s vyškrtnutým i-tým řádkem a j-tým sloupcem.

Příklad pátý — *Věta o adjungované matici:* Dokažte, že platí pro matici A platí:

$$A\mathrm{adj}(A) = \det(A)I_n.$$

Příklad šestý — Pomocí adjungované matice spočítejte inverzní matici pro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad sedmý Dokažte, že pro $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ (tedy A celočíslenou) platí: A^-1 je celočíselné právě tehdy když $\det(A) = \pm 1$.

Příklad osmý Rozhodněte, zda $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(BA)$ pro libovolné matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$