Trocha teorie.

- Pro čtvercovou matici $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ řekneme, že $\lambda \in \mathbb{K}$ je *vlastním číslem* matice A, pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ pro který platí $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Takový vektor $\mathbf{v}$ nazýváme *vlastním vektorem* matice A příslušným k vlastnímu číslu λ.

- Vlastní čísla je možno naleznout jako kořeny charakteristického polynomu matice A, tedy $\det(A - \lambda I)$.

Více praxe.

Úloha 1: Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Úloha 2: U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla a to $3, -4$ a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Úloha 3: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice nad tělesem Z_5. Určete, zdali je tato matice diagonalizovatelná.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 4: Ve městě Pupákově jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů co volilo Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch co volili Bohaté zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

Jak bude vypadat limitní rozložení sil v místím (řekněme stočlenném) zastupitelstvu?

Úloha 5: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Určete, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$