8. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Vlastní čísla — pokračování

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Dále určete jejich geometrickou a algebraickou násobnost. Určete, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

PŘÍKLAD DRUHÝ Nalezněte dvě matice, které mají stejná vlastní čísla, ale různou algebraickou a geometrickou násobnost.

PŘÍKLAD TŘETÍ Dokažte následující větu.

Věta 10.12 (Vlastnosti vlastních čísel). *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Pak:*

(1) A je regulární právě tehdy, když 0 není její vlastní číslo,

(2) je-li A regulární, pak A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(3) A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(4) αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(5) $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(6) A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Připomeňme si příklad z minulé hodiny:

> Ve městě Pupákově jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů co volilo Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch co volili Bohaté zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.
> Jak bude vypadat limitní rozložení sil v místím (řekněme stočlenném) zastupitelstvu?

Nyní mějme populaci králíků. Králici se řídí následujícími pravildy:

- Králík se dožije max 3 roky.
- Druhého roku se jednoletý králík dožije s pravděpodobností 50%. Třetího roku se dvouletý králík dožije se stejnou pravděpodobností.
- Průměrný počet potomků králíka ve druhém roce je 6, ve 3 pak 8. V prvním roce nemá králík žádné potomky.

1. Pokud máme 24 ročních 24 dvouletých a 3 tříleté králíky, kolik jakách králíků budeme mít další rok?
2. Zjistěte kolik jakých králíků si musím na začátku koupit, abych měl každý rok stále stejný poměr různě starých králíků?

PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte (pokud jste to neměli již na přednášce) následující větu:

Věta 10.11 (Součin a součet vlastních čísel). *Buď* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *s vlastními čísly* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Pak*

(1) $\det(A) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$,

(2) $\operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Dále si zaveďme charakteristický polynom jako

$$(-1)^n[\lambda^n + \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda^{n-i}].$$

Umíte určit čemu se rovná c_1 a c_n?

PŘÍKLAD ŠESTÝ Dokažte vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti pomocí vlastních čísel.