

9. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Vlastní čísla a podobnost

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Přípomeňme si příklad z minulé hodiny:

Ve městě Pupákově jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů co volilo Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch co volili Bohaté zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

Jak bude vypadat limitní rozložení sil v místím (řekněme stočlenném) zastupitelstvu?

Nyní mějme populaci králíků. Králíci se řídí následujícími pravidly:

- Králík se dožije max 3 roky.
 - Druhého roku se jednoletý králík dožije s pravděpodobností 50%. Třetího roku se dvouletý králík dožije se stejnou pravděpodobností.
 - Průměrný počet potomků králíka ve druhém roce je 6, ve 3 pak 8. V prvním roce nemá králík žádné potomky.
1. Pokud máme 24 ročních 24 dvouletých a 3 tříleté králíky, kolik jakých králíků budeme mít další rok?
 2. Zjistěte kolik jakých králíků si musím na začátku koupit, abych měl každý rok stále stejný poměr různě starých králíků?

PŘÍKLAD DRUHÝ Dokažte vzorec pro n -tý člen Fibonacciho posloupnosti pomocí vlastních čísel.

PŘÍKLAD TŘETÍ Rozložte následující matice na součin RJR^{-1} , kde R je regulární matice a J je matice v Jordanově normálním tvaru.

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ 2. \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} & 4. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nakonec spočítejte jejich druhou mocninu a druhou odmocninu.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Dokažte, že algebraická násobnost je vždy větší rovna geometrické násobnosti.

PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte následující vzoreček pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$r(A) - \frac{n}{2} \leq r(A^2) \leq r(A).$$

Jak bude vypadat $r(A)$, pokud A je diagonalizovatelná?