10. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Jordanův tvar a hermitovské matice

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Rozložte následující matice na součin RJR^{-1}, kde R je regulární matice a J je matice v Jordanově normálním tvaru.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Nakonec spočítejte jejich druhou mocninu a druhou odmocninu.

PŘÍKLAD DRUHÝ Dokažte, že algebraická násobnost je vždy větší rovna geometrické násobnosti.

PŘÍKLAD TŘETÍ Dokažte následující vzoreček pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$$r(A) - \frac{n}{2} \leq r(A^2) \leq r(A).$$

Jak bude vypadat $r(A)$, pokud A je diagonalizovatelná?

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Dokažte, že matice A je hermitovská a poté nalezněte její spektrální rozklad.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Poté zkuste ještě odhadnout vlastní čísla pomocí Gerschgorinových disků.

PŘÍKLAD PÁTÝ Vraťme se na chvíli ke stochastické matici (Připomeňme, že je to matice, jejíž sloupce jsou reprezentovány nezápornými vektory se součtem prvků =1).

Dokažte:

- že 1 je vždy vlastní číslo stochastické matice.
- Největší vlastní číslo je 1.
- Pokud i druhé největší vlastní číslo je ostře menší než 1 a matice A je diagonalizovatelná, tak mocnina této matice vyždy konverguje k matici, kde v každém sloupci je násobek vlastního vektoru příslušnému k vlastnímu číslu 1.