13. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY II.

Bilineární a kvadratické formy

PŘÍKLAD PRVNÍ Nalezněte matici, která není pozitivně definitní (semidefinitní), ale na které Sylevestrovo kritérium odpoví kladně. Naopak dokažte, že pokud Sylvestrovo kritérium odpoví negativně i pro nesymetrickou matici, znamená to, že tato matice není pozitivně definitní (semidefinitní).

PŘÍKLAD DRUHÝ Ověřte, jestli jsou následující funkce $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bilineární formy a zdali jsou kvadratické formy. Poté, pokud je to možné vytvořte matice těchto funkcí.

- $f(x, y) := x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_1y_1$.
- $f(x, y) := x_1^3 + x_2^2 + x_1y_1 + x_2y_1 + x_3y_3$.
- $f(x, y) := x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2$.

PŘÍKLAD TŘETÍ Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice bilineární formy na $\mathbb{R}^3$. Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Najděte symetrickou matici, která vyjádřuje tutéž kvadratickou formu. (Vše vůči stejné bázi.)

Jak se situace změní pokud bychom měli obdobnou matici nad $\mathbb{Z}_2^3$? $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Rozhodněte, zdali platí, že $g(u) > 0$ pro všechna netriviální $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

- $g(u) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2$
- $g(u) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_2x_3$, řešte vzhledem k parametru a. Je pro ostatní volby a hodnota $g(u) \leq 0$ pro všechna u?

PŘÍKLAD PÁTÝ Vyjádřete násleudící kvadratickou formu v prostoru $\mathbb{R}^2$ pomocí různých bazí:

$$f(u) := u_1^2 + 6u_1u_2 + 4u_2^2.$$

1. Kanonická báze.
2. $\{(2, 1)^T, (1, 2)^T\}$.
3. $\{(-1, 1)^T, (1, 0)^T\}$.